Analiza Matematyczna 1 – 2021/22

dr hab. Jan Iwaniszewski, prof. UMK

Wykład (dla studentów I roku kierunków: Fizyka, Fizyka Techniczna, Astronomia, Automatyka i Robotyka, Informatyka Stosowana) wprowadza podstawowe pojęcia, operacje i metody analizy matematycznej stosowane w fizyce i technice. Główny nacisk położony jest na intuicyjne zrozumienie istoty poszczególnych operacji, a przede wszystkim na zdobycie biegłości rachunkowej. Do wykładu prowadzone są ćwiczenia rachunkowe. Zaliczenie przedmiotu następuje po zaliczeniu ćwiczeń i zdaniu egzaminu końcowego.

Treść wykładu

1. liczby, zbiory liczb, relacje, funkcje - badane obiekty
2. ciągi, szeregi, granice, zbieżność
3. rachunek różniczkowy - pochodna, różniczka, szereg Taylora
4. rachunek całkowy - całka nieoznaczona i oznaczona
5. równania różniczkowe
6. metody przybliżone
7. praktyczne wykorzystanie narzędzi analizy matematycznej

Zalecana literatura

1. **W. Krysicki, L. Włodarski, Analiza matematyczna w zadaniach, T. I-II (PWN, Warszawa, 2019, 2020)**
2. **J. Stewart, Calculus (PWN, Warszawa, 2020)**
3. **G. M. Fichtenholz, Rachunek różniczkowy i całkowy, T. I-III (PWN, Warszawa, 2020)**
4. W. Korczak, M. Trajdos, Wektory, pochodne, całki ((PWN, Warszawa, 2018)
5. K. Niedziałomski, R. Kowalczyk, C. Obczyński, Granice i pochodne. Metody rozwiązywania zadań (PWN, Warszawa, 2013)
6. C. Obczyński, R. Kowalczyk, K. Niedziałomski, Całki. Metody rozwiązywania zadań (PWN, Warszawa, 2012)
7. R. Leitner, W. Matuszewski, Z. Rojek, Zadania z matematyki wyższej cz.1,2 (WNT, Warszawa, 2017)
8. J. Banaś, S. Wędrychowicz, Zbiór zadań z analizy matematycznej, (PWN, Warszawa, 2018)
9. M. Gewert, Z. Skoczylas, Analiza matematyczna 1:
   - Definicje, twierdzenia, wzory, (Oficyna Wydawnicza GIS, Warszawa, 2015)
   - Przykłady i zadania, (Oficyna Wydawnicza GIS, Warszawa, 2014)
   - Kolokwia i egzaminy, (Oficyna Wydawnicza GIS, Warszawa, 2017)
10. M. Gewert, Z. Skoczylas, Analiza matematyczna 2:
    - Definicje, twierdzenia, wzory, (Oficyna Wydawnicza GIS, Warszawa, 2016)
    - Przykłady i zadania, (Oficyna Wydawnicza GIS, Warszawa, 2016)
    - Kolokwia i egzaminy, (Oficyna Wydawnicza GIS, Warszawa, 2012)
11. W. Leksiński, I. Nabiałek, W. Żakowski, Matematyka dla studiów eksperymentalnych (WNT, Warszawa, 1977)
12. K. Szałajko, Matematyka T.1 (PWN, Warszawa, 1984)
13. S. Romanowski, W. Wrona, Matematyka wyższa dla studiów technicznych (PWN, Warszawa, 1962)

Poradniki, tablice,...

14. **I. N. Bronsztejn, K. A. Siemiendiajew, Matematyka, poradnik encyklopedyczny (PWN, Warszawa, 2019)**
15. G. A. Korn, T. M. Korn, Matematyka dla pracowników naukowych i technicznych, cz. 1 i 2 (PWN, Warszawa, 1983)
16. red. I Dziubiński, T. Świątkowski, Poradnik Matematyczny, cz.1 i 2 (PWN, Warszawa, 1985)
17. B. Piłat, M. J. Wasilewski, Tablice całek (WNT, Warszawa, 1983)

Zasady zaliczenia

- Ćwiczenia
  - kartkówki,
  - zadania domowe – (min. 200 zadań do zrobienia) min. 20 zadań oddanych
  - 3 kolokwia

  ocena końcowa:
  kart. (20%) + zad. dom. (10%) + kol. (70%) = suma (100%)

- Wykład
  - egzamin:
    - I termin – ??.02.2022, godz. ??
    - II termin – ??.02.2022, godz. ??

  ocena końcowa:
  kolokwia (30%) + zad. egzamin. (70%) = suma (100%)

uzyskane punkty (w %), a ocena końcowa:

[0 – 50)	***ndst***	[50 – 59)	***dost***	[59 – 68)	***dost+***
[68 – 77)	***db***	[77 – 86)	***db+***	[86 – 100]	***bdb***

1 Zbiory i liczby

Zbiory liczbowe

zbiory $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \ldots$, elementy zbioru (liczby) $a, b, c, \ldots, x_1, x_2, x_k$
np. $\mathbb{A} := \{a, b, c, \ldots\}$, $\mathbb{B} := \{b : \text{warunek}\}$, $\mathbb{X} := \{x_k : x_k = 2^k\}_{k=0}^{\infty} = \{2^k\}_{k=0}^{\infty}$

- liczby naturalne
  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- liczby całkowite
  $\mathbb{Z} = \{m : m \in \mathbb{N} \text{ lub } m = 0 \text{ lub } -m \in \mathbb{N}\}$
- liczby wymierne
  $\mathbb{Q} = \left\{q : q = \dfrac{m}{n}, m \in \mathbb{Z} \text{ i } n \in \mathbb{N}\right\}$
- liczby rzeczywiste
  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \overline{\mathbb{Q}}$ ($\overline{\mathbb{Q}}$ – liczby niewymierne)
- liczby zespolone
  $\mathbb{C} = \left\{c = a + i\,b : a \in \mathbb{R} \text{ i } b \in \mathbb{R} \text{ i } i^2 = -1\right\}$

Dla zbiorów $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ definiujemy operacje na zbiorach:

$\mathbb{A} \cup \mathbb{B} := \{c : \ c \in \mathbb{A} \text{ lub } c \in \mathbb{B}\}$	suma
$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} := \{c : \ c \in \mathbb{A} \text{ i } c \in \mathbb{B}\}$	iloczyn, przekrój
$\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} := \{c : \ c \in \mathbb{A} \text{ i } c \notin \mathbb{B}\}$	różnica
$\mathbb{A} \subset \mathbb{B} := \{c : \ c \in \mathbb{A} \ \Rightarrow \ c \in \mathbb{B}\}$	zawieranie się, inkluzja, $\mathbb{A}$ jest podzbiorem $\mathbb{B}$
$\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \{(a, b) : \ a \in \mathbb{A}, b \in \mathbb{B}\}$	iloczyn kartezjański

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^3$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Kwantyfikatory:

kwantyfikator ogólny: $\forall$ lub $\bigwedge$ — "dla każdego", każdy element zbioru spełnia warunek, np. $\underset{a \in \mathbb{A}}{\forall}$, $\underset{x < x_0}{\forall}$
kwantyfikator szczegółowy: $\exists$ lub $\bigvee$ — "istnieje", przynajmniej jeden element zbioru spełnia warunek, np. $\underset{a \in \mathbb{A}}{\exists}$, $\underset{x > x_0}{\exists}$

Zbiór ograniczony $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$

- ograniczenie od góry:
  - jeżeli $\underset{M \in \mathbb{R}}{\exists} \ \underset{x \in \mathbb{A}}{\forall} \quad x \leqslant M$, to zbiór $\mathbb{A}$ jest **ograniczony z góry**,
  - M - kraniec górny zbioru,
  - jeżeli zbiór jest nieograniczony z góry, to $M = \infty$,
  - najmniejszy kraniec górny to **kres górny** $M^* = \min\{M\} = \sup A$ (*supremum*)
- ograniczenie od dołu:
  - $\underset{m \in \mathbb{R}}{\exists} \ \underset{x \in \mathbb{A}}{\forall} \quad x \geqslant m \quad \Rightarrow$ zbiór $\mathbb{A}$ **ograniczony z dołu**,
  - m - kraniec dolny zbioru,
  - jeżeli zbiór jest nieograniczony z dołu, to $m = -\infty$,
  - największy kraniec dolny to **kres dolny** $m^* = \max\{m\} = \inf A$ (*infimum*)
- zbiór ograniczony z góry i z dołu $\quad \Leftrightarrow \quad$ **zbiór ograniczony**

Reguły zaokrągleń:

metoda 1 liczby, których część odrzucana w wyniku zaokrąglania ma postać:

- $4 * **$ - zaokrąglenie w dół, np. $1.7437 \approx 1.7$,
- 5 i $5 * **$ - zaokrąglenie w górę, np. $1.7537 \approx 1.8$,

metoda 2 liczby, których część odrzucana w wyniku zaokrąglania ma postać:

- $4 * **$ - zaokrąglenie w dół, np. $1.7437 \approx 1.7$,
- $5 * **$ - zaokrąglenie w górę, np. $1.7537 \approx 1.8$,
- 5 - zaokrąglenie do parzystej, np. $1.75 \approx 1.8$, $1.85 \approx 1.8$,

(po wybraniu metody należy w danym opracowaniu systematycznie stosować tylko tę metodę)

Szacowanie nieznanej wielkości:

1. wyrażenie poszukiwanej wielkości możliwie prostym wzorem,
2. oszacowanie wartości wielkości występujących we wzorze,
3. oszacowanie wyrażenia liczbowego

Przedrostki liczbowe

wielokrotności			podwielokrotności		
10^3	kilo	k	10^{-3}	mili	m
10^6	mega	M	10^{-6}	mikro	μ
10^9	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	tera	T	10^{-12}	piko	p
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{18}	eksa	E	10^{-18}	atto	a
10^1	deka	da	10^{-1}	decy	d
10^2	hekto	ha	10^{-2}	centy	c

Zadania

Szacowanie rzędu wielkości

1. Oszacować wartość liczbową
$$\frac{1213.14 \cdot 10^{-19} \cdot 8\pi}{(0.500873 \cdot 10^3 - 499937 \cdot 10^{-3}) \cdot (1.4 \cdot 10^3)^8}$$
2. Ile wentylatorów o wydajności $1200\, m^3/godz$ należy zamontować w sali 26, by powietrze było całkowicie wymieniane 2 razy na godzinę?
3. Promień Wszechświata szacuje się na $10^{26}\, m$, a liczbę nukleonów we Wszechświecie na 10^{80}. Oszacować masę Wszechświata, średnią gęstość materii i średnią ilość nukleonów w $1\, m^3$.
4. (Feynman T I cz. 1 s. 365) Dawno temu, w erze paleozoicznej kropla popołudniowej ulewy upadła na błotnistą równinę, pozostawiając trwały ślad. Ślad ten w postaci skamieliny odkopał pewnego upalnego dnia w wiele lat później student geologii. Wysączywszy do dna wodę ze swojej manierki student ten bezskutecznie się zastanawiał, ile cząsteczek wody z tej starożytnej kropli mogło znajdować się w manierce, którą przed chwilą opróżnił. Spróbuj Ty ocenić tę liczbę.
5. Oszacować jaki rezultat osiągnąłby skoczek wzwyż na Księżycu, jeżeli przyspieszenie grawitacyjne jest tam 6-krotnie mniejsze niż na Ziemi.
6. Ciekły hel ma gęstość $\rho = 0.13\, g/cm^3$. Oszacować wartość promienia atomu He zakładając, że atomy są upakowane w najgęstszej możliwej konfiguracji, która wypełnia 74% przestrzeni.
7. Jaki wpływ na wyniki konkurencji biegowych miało ustawienie strzelającego z pistoletu startera na murawie stadionu? Dlaczego obecnie zawodnicy mają głośniki wmontowane w bloki startowe? Jak to pogodzić z faktem, że na mecie fotokomórka ustawiona jest w dalszym ciągu z boku bieżni?
8. Cegła waży kilogram i pół cegły. Ile elektronów zawiera jedna cegła? (Głównym składnikiem glinek ceramicznych jest kaolinit $Al_2Si_2O_9H_4$.)

2 Ciągi liczbowe

Definicje:

ciąg liczb naturalnych	$1, 2, 3, 4, \ldots, n, , \ldots$
ciąg liczbowy	$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n, \ldots = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \{x_n\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{R}$

Klasy ciągów:

ciągi monotoniczne:	rosnący $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ x_n < x_{n+1}$	malejący $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ x_n > x_{n+1}$
ciągi ograniczone:	z dołu $\underset{m\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ x_n \geqslant m$	z góry $\underset{M\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ x_n \leqslant M$

Ciąg ograniczony z dołu i z góry to **ciąg ograniczony**.

Zbieżność i granice ciągów

Jeżeli $\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n>N}{\forall}\ |x_n - a| < \varepsilon$, to a jest granicą ciągu. Zapisujemy: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a\,, \quad x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a\,.$

szczególny przypadek $a = 0$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\,, \quad x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Jeżeli $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ i $|a| < \infty\,,$ to $(x_n - a) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

Ciąg, który ma granicę, to **ciąg zbieżny**. Ciąg, który nie jest zbieżny, jest **rozbieżny**.

Jeżeli $\underset{\mathcal{E}>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n>N}{\forall}\ \mathcal{E} < x_n\,,$ to **ciąg ma granicę nieskończoną**. Zapisujemy: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty\,, \quad x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$

Podobnie: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty\,, \quad x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty.$

W tych przypadkach ciąg $\{x_n\}$ jest **rozbieżny do** $\pm\infty$

Twierdzenia o granicach ciągów

kryterium zbieżności Bolzano: Ciąg $\{x_n\}$ ma granicę skończoną $\Leftrightarrow \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n,m>N}{\forall}\ |x_n - x_m| < \varepsilon$.

działania na ciągach: Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ i $c = const$, to:

- granica iloczynu przez liczbę $\lim\limits_{n\to\infty} [c\cdot x_n] = c\cdot a$
- granica sumy $\lim\limits_{n\to\infty} [x_n + y_n] = a + b$
- granica iloczynu $\lim\limits_{n\to\infty} [x_n \cdot y_n] = a\cdot b$
- granica ilorazu $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{x_n}{y_n}\right] = \dfrac{a}{b}$ (dla $b \neq 0$)
- Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ i $\{y_n\}$ jest ciągiem ograniczonym, to $\lim\limits_{n\to\infty} [x_n \cdot y_n] = 0$.
- Jeżeli $\underset{n}{\forall}\ x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$, oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, to $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Twierdzenie: Jeżeli ciąg monotonicznnie rosnący $\{x_n\}$ jest ograniczony z góry $\underset{M}{\exists}\underset{n}{\forall} x_n \leqslant M$ to ma on granicę skończoną. Jeśli nie jest ograniczony to granicą jest $+\infty$. Analogicznie dla ciągu monotonicznie malejącego.

liczba Eulera e $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e \approx 2.71828$

Zadania

Obliczyć granice ciągów:

1. $x_n = n - \dfrac{2}{n^2} + 3n^3 - \dfrac{4}{n^4}$
2. $x_n = \dfrac{6n^4 + 4n^3 + 3n - 1}{4n^3 + 3n - 1}$
3. $x_n = \dfrac{3n^4 - 2n^3 - 4}{2n^5 + 3n^4 - 2n^3 - 4}$
4. $x_n = \dfrac{4}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4}}$
5. $x_n = \left(\dfrac{2n^2 - 3n + 1}{3n^2 + 2n - 1}\right)^{-n}$
6. $x_n = \dfrac{2n-4}{n^2}$
7. $x_n = \dfrac{2n-4}{n^2}$
8. $x_n = 3^n$
9. $x_n = (-3)^n$
10. $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$
11. $x_n = \dfrac{1-\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$
12. $x_n = \dfrac{2 - \sqrt[3]{6n^2 - 3n + 4}}{3 + 2\sqrt{3n^3 + 4n^2 - n + 2}}$
13. $x_n = \dfrac{\sqrt[3]{27n^2 + 3n + 4} - \sqrt[3]{8n^2 - 2n + 1}}{\sqrt[3]{6n - 7}}$
14. $c_n = \left(2 + \dfrac{1}{n}\right)^n$
15. $c_n = \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n$
16. $c_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{2n}$
17. $c_n = n\ln(1+n) - n\ln(n)$
18. $c_n = (1+n)\ln(1+n) - n\ln(n)$
19. $c_n = n\ln(1+n) - (1+n)\ln(n)$
20. $w_n = \sin(2n-1)$
21. $w_n = \dfrac{\sin(2n+3)}{3n-2}$
22. $w_n = \sin(3n+1)\cdot\cos(3n-1)$
23. $w_n = (3n-2)\sin(2n+3)$
24. $w_n = \cos\left(\dfrac{2\pi}{n+2\pi}\right)$
25. $w_n = (2n-1)\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$
26. $w_n = \sin(n+\alpha)\sin(n+\beta) + \cos(n+\alpha)\cos(n+\beta)$

3 Funkcje

Liczba a zmienna

- **liczba** – oznacza konkretny element zbioru (liczbowego), konkretną wartość danej wielkości (fizycznej),
- **zmienna** – oznacza dowolny element zbioru (liczbowego), pewną wielkość (fizyczną) bez precyzowania jej konkretnej wartości
  zmienna x zadana jest przez **zbiór** swoich **wartości** $\mathbb{X}$, czyli $x \in \mathbb{X}$, zbiór $\mathbb{X}$ to **obszar zmienności zmiennej** x
  gdy $\mathbb{X} \subset \mathbb{Z}$ to x jest *zmienną dyskretną*, gdy $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ to x jest *zmienną ciągłą*
- **funkcja** – opisuje relację zachodząca między różnymi zmiennymi, różnymi wielkościami (fizycznymi)

Odwzorowanie i funkcja

odwzorowanie: – wzajemne przyporządkowanie sobie elementów (liczb) dwóch zbiorów: $\quad X \ni x \;\mapsto\; y \in Y$

Jeżeli odwzorowanie jest **jednoznaczne** (jednej wartości x odpowiada tylko jedna wartość y), to odwzorowanie nazywa się **funkcją**: $\quad X \ni x \;\mapsto\; y = f(x) \in Y, \quad X$ - **dziedzina, zbiór argumentów**, Y - **przeciwdziedzina, zbiór wartości**

Jeżeli jednej wartości y odpowiada tylko jedna wartość x, to funkcja jest **wzajemnie jednoznaczna**.

oznaczenia funkcji np.: $\quad y = f(x)\,,\ y = g(x)\,,\ a = h(b), \ldots$, ale też np. $y = y(x)$

Rodzaje funkcji

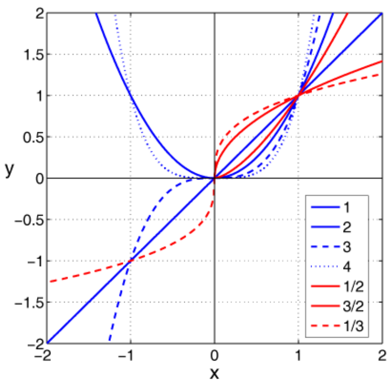
- **funkcje złożone** $\qquad y = f(g(x))$
- **funkcje odwrotne** $\qquad y = f^{-1}(x)$, czyli $x = f(y)$

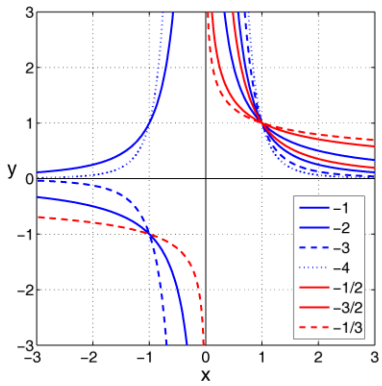
Klasy funkcji

- **parzysta** $\qquad \underset{x}{\forall}\, f(-x) = f(x),$
- **nieparzysta** $\qquad \underset{x}{\forall}\, f(-x) = -f(x),$
- **okresowa** $\qquad \underset{x_0}{\exists}\,\underset{x}{\forall}\, f(x + x_0) = f(x),$
- **monotoniczne rosnąca** $\qquad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$
- **monotoniczne malejąca** $\qquad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2),$
- **ograniczona z dołu** $\qquad \underset{m\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{x}{\forall}\quad f(x) \geqslant m,$
- **ograniczona z góry** $\qquad \underset{M\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{x}{\forall}\quad f(x) \leqslant M,$
- **ograniczona** $\qquad \underset{m,M\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{x}{\forall}\quad m \leqslant f(x) \leqslant M,$

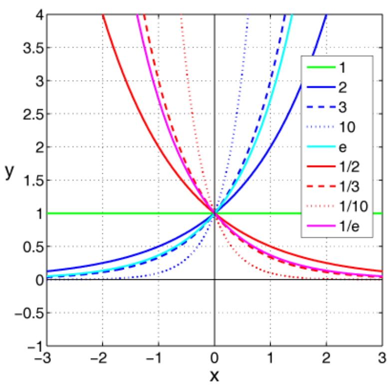
Funkcje elementarne i do nich odwrotne

- potęgowe $y = x^p$

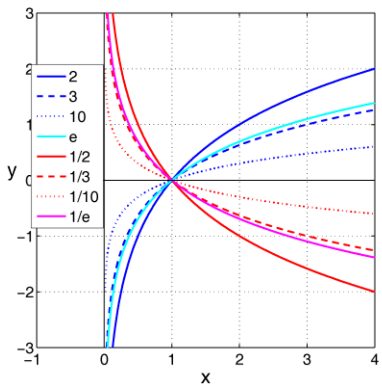




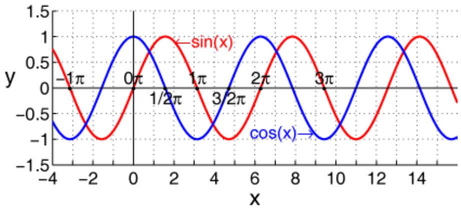
- wykładnicze $y = a^x\ (a > 0),\ e^x \equiv \exp x,$

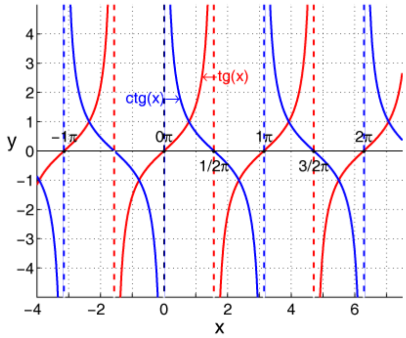


- logarytmiczne $y = \log_a x\ (a > 0),\ \log_e x \equiv \ln x,\ \log_2 x \equiv \lg x$

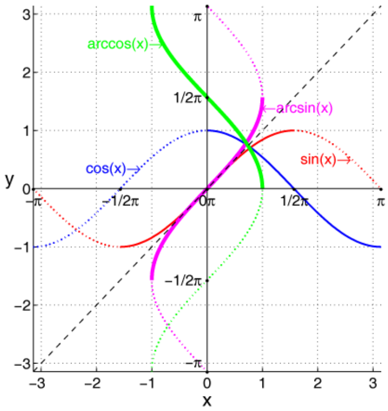


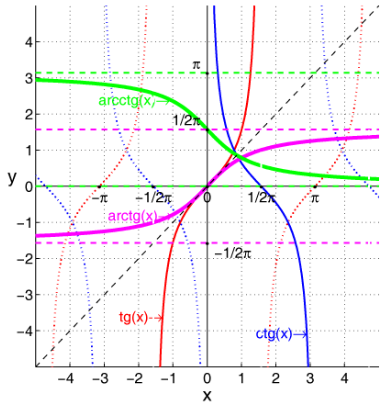
- trygonometryczne $y = \sin x,\ \cos x$, $\quad y = \tan x (= \mathrm{tg} x),\ \cot x (= \mathrm{ctg} x)$





- cyklometryczne $y = \arcsin x,\ \arccos x$, $\quad y = \arctan x (= \mathrm{arctg} x),\ \mathrm{arccot}\, x (= \mathrm{arcctg} x)$





Zadania

1. Określić dziedzinę i przeciwdziedzinę wszystkich funkcji elementarnych (w przypadku funkcji wykładniczej i logarytmicznej uwzględnić wszystkie możliwe wartości parametru a).

2. Korzystając z wzorów na $\sin(a+b)$, $\cos(a+b)$ i jedynki trygonometrycznej:
   (a) znaleźć wzór na $\mathrm{tg}(a+b)$ i $\mathrm{ctg}(a+b)$,
   (b) przedstawić $\sin(a) \pm \sin(b)$ oraz $\cos(a) \pm \cos(b)$ w postaci iloczynu funkcji sin i cos,
   (c) przedstawić każdą funkcję trygonometryczną przez każdą inną funkcję (wziąć pod uwagę wartości x w różnych ćwiartkach układu współrzędnych)
   (d) przedstawić wszystkie funkcje trygonometryczne od argumentu połówkowego $a/2$ (np. $\sin(a/2)$) przy pomocy funkcji od argumentu a i odwrotnie.

3. Uprościć wyrażenia:
   (a) $\dfrac{\sin x \pm \sin y}{\cos x \pm \cos y}$
   (b) $\dfrac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y}$
   (c) $\dfrac{\cos x - \cos y}{\cos x + \cos y}$
   (d) $\dfrac{\tan a + \tan b}{\tan a - \tan b} + \dfrac{\cot a + \cot b}{\cot a - \cot b}$
   (e) $\dfrac{\dfrac{\tan a + \tan b}{\cot a + \cot b} + 1}{\dfrac{\tan a - \tan b}{\cot a - \cot b} - 1}$
   (f) $\cos(4 \arccos(x))$
   (g) $\sin(2 \arctan(x))$
   (h) $\arcsin\left(\dfrac{1 - \tan(x)^2}{1 + \tan(x)^2}\right)$
   (i) $\arccos\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos(x) + \cos(x - \frac{\pi}{2})\right)\right]$
   (j) $\arctan\left(\dfrac{1}{\tan x + \cot y} - \dfrac{1}{\cot x + \tan y}\right)$
   (k) $\mathrm{arccot}\left[\dfrac{\sqrt{1 - \sin(2x)^2}}{-\sin(2x)}\right]$
   (l) $\arcsin\left[\sqrt{2}\cos\left(x + \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) - \cos x\right]$
   (m) $\ln\left[\dfrac{1}{(\cos(\arctan x))^2} - 2\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$

Granica funkcji

Jeżeli $\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta}{\exists}\ \underset{|x-x_0|<\delta}{\forall}\quad |f(x)-a|<\varepsilon\,,$ to a jest **granicą funkcji**. Zapisujemy: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ lub $f(x)\underset{x\to x_0}{\longrightarrow} a\,.$

granica lewostronna $(x<x_0)$: $\lim\limits_{x\nearrow x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=a\,,$

granica prawostronna $(x>x_0)$: $\lim\limits_{x\searrow x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=a\,,$

Jeżeli istnieje granica lewostronna $\lim\limits_{x\nearrow x_0} f(x)=a$ i prawostronna $\lim\limits_{x\searrow x_0} f(x)=b$, oraz $a=b$, **to** istnieje granica $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$.

Działania na granicach: Jeżeli $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$, to:

granica iloczynu przez skalar $\lim\limits_{x\to x_0}[c\cdot f(x)]=c\cdot a$ (c-dowolna stała)

granica sumy $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=a+b$

granica iloczynu $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=a\cdot b$

granica ilorazu $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{a}{b}$ (dla $b\neq 0$)

granica funkcji złożonej Jeżeli $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ i $\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$, to $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x))=b$

Jeżeli dla każdego x w pewnym otoczeniu punktu x_0 zachodzi $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$ oraz $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=a$, to $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=a$.

pewne granice: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$ $\qquad \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

Ciągłość funkcji

Jeżeli w punkcie $x=x_0$ istnieje granica funkcji $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ oraz $a=f(x_0)$, to funkcja $f(x)$ jest **ciągła w tym punkcie**.
Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w każdym punkcie zbioru $\mathbb{X}$, to jest **ciągła na tym zbiorze**.

Własności ciągłości:
Jeżeli $f(x)$ i $g(x)$ są ciągłe w $x=x_0$, to iloczyn przez liczbę, suma, iloczyn, iloraz, złożenie tych funkcji są ciągłe (por. własności granicy).

Pewne twierdzenia dotyczące ciągłości

- Twierdzenie o wartości pośredniej funkcji
  Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła na $[a,b]$ oraz $f(a)=A,\ f(b)=B$ i $A<B$, to dla dowolnej liczby C takiej, że $A<C<B$ istnieje $x\in[a,b]$ taki, że $f(x)=C$.
- Twierdzenie o ograniczoności funkcji
  Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła na $[a,b]$ (przedział domknięty), to funkcja jest ograniczona, tzn. istnieją liczby m i M takie, że $m\leqslant f(x)\leqslant M$ dla każdego $x\in[a,b]$.
- Twierdzenie o wartości największej i najmniejszej funkcji
  Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła na $[a,b]$ (przedział domknięty), to osiąga ona w tym przedziale swój kres górny i kres dolny, tzn. istnieją $x_1,\ x_2\ \in[a,b]$ takie, że $f(x_1)\leqslant f(x)\leqslant f(x_2)$ dla każdego $x\in[a,b]$.
- Twierdzenie o istnieniu funkcji odwrotnej
  Jeżeli funkcja $f(x)$ jest monotoniczna (rosnąca lub malejąca) i ciągła na $[a,b]$, to na przedziale wartości tej funkcji określona jest funkcja do niej odwrotna $x=f^{-1}(y)$ także monotoniczna (odpowiednio rosnąca lub malejąca).

Zadania

Wyznaczyć następujące granice (znak $\pm$ oznacza, że należy policzyć dwie różne granice dla tej samej funkcji):

1. $\displaystyle\lim_{x\to\pm1}\frac{x+1}{x^3+1}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to\pm2}\frac{x-1}{4-x^2}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to0,\,\pm1,\,\pm2,\,\pm\infty}\frac{1-x}{2x^2+2x-4}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{a^2-x}-a}{x}$, dla $a>0$
6. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{\arctan x}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos 2x-1}{\sin 4x}$
9. $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2}\left(\tan x+\frac{1}{x-\pi/2}\right)$

Pokazać, że:

10. $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{1+x^{\frac{1}{3}}}{1+x^{\frac{1}{5}}}=\frac{5}{3}$
11. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$
12. $\displaystyle\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$
13. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$
14. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln(a)}$
15. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$
16. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln(a)$
17. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(x)}{x}=0$
18. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos(x)-1}{x^2}=-\frac{1}{2}$

4 Różniczkowanie (Pochodne)

Definicja pochodnej

granica ilorazu różnicowego $$y' = (f(x))' = f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{x_1\to x}\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$$

Interpretacja: pochodna funkcji w danym punkcie równa jest wartości współczynnika nachylenia (współczynnika kierunkowego) stycznej do krzywej danej przez wykres funkcji w tym punkcie.
Ciągłość funkcji w punkcie x to **warunek konieczny** istnienia pochodnej w tym punkcie (ale nie jest to warunek dostateczny).

Własności:

Pochodna sumy $[f(x)+g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

Pochodna iloczynu $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Pochodna ilorazu $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

Pochodna funkcji złożonej $(f\,[g(x)])' = f'(y)\,\big|_{y=g(x)}\cdot g'(x)$

Pochodna funkcji odwrotnej $\left(f^{-1}(x)\right)' = \left[f'(y)\,\big|_{y=f^{-1}(x)}\right]^{-1}$

Różniczka:

- dx - ***różniczka zmiennej*** x - nieskończenie mały (infinitezymalny) przyrost Δx wartości zmiennej x
- $dy = df = df(x) = f'(x)dx$ - ***różniczka funkcji*** $y = f(x)$ - liniowa część przyrostu Δy wartości funkcji przy infinitezymalnej zmianie dx wartości argumentu

Pochodne wyższego rzędu:

- druga pochodna $$y'' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y'}{\Delta x} = \frac{d}{dx}y' = \frac{d}{dx}\left\{\frac{d}{dx}y\right\} = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 y = \frac{d^2}{dx^2}y = \frac{d^2y}{dx^2} = y^{(2)} = \frac{d^2f(x)}{dx^2} = f^{(2)}(x)$$
- pochodna n-tego rzedu $$y^{(n)} = f(x)^{(n)} = \frac{d^nf(x)}{dx^n}$$

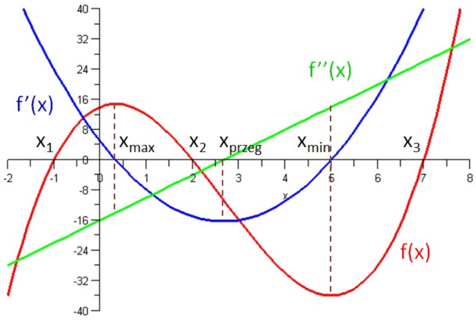
Zadania

1. Wyprowadzić wzór na pochodną ilorazu dwóch funkcji: (a) badając granicę ilorazu różnicowego, (b) korzystając ze wzorów na pochodną iloczynu, funkcji złożonej i funkcji potęgowej,
2. Wyznaczyć różniczkę sumy, iloczynu i ilorazu dwóch funkcji, oraz funkcji złożonej i odwrotnej.
3. Korzystając z definicji (granica ilorazu różnicowego) znaleźć pochodne następujących funkcji: $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{x+1}{x-1}$, $\dfrac{2}{3-2x}$, $\sqrt{x}$, $2\sqrt{3x-1}$, xe^{-x}, $\dfrac{\cos x}{x}$.
4. Obliczyć pochodne wszystkich funkcji elementarnych korzystając tylko z definicji (granica ilorazu różnicowego), z wzorów na pochodną sumy, iloczynu, funkcji złożonej i funkcji odwrotnej, z obliczonych już pochodnych innych funkcji elementarnych, oraz ze znanych relacji między funkcjami.
5. Korzystając ze znajomości pochodnych funkcji elementarnych oraz ze wzorów na pochodną sumy, iloczynu, itd., obliczyć pochodne następujących funkcji (rezultat podać w możliwie najprostszej postaci):
   1. $y = 4x^3 - 6x^2 + 3x + 5$,
   2. $y = \left(x^2-2x+3\right)^5$,
   3. $y = \dfrac{4}{3x^3\sqrt{x} - x^2\sqrt{x^3}}$,
   4. $y = \left(\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{3}{2}}$,
   5. $y = \log_{10}\left(\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}\right)$,
   6. $y = \dfrac{\cot(3x)\cot(2x)+1}{\cot(2x)-\cot(3x)}$,
   7. $y = \ln\left(2\sin(3x)\right)$,
   8. $y = \arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$,
   9. $y = (1-x)\,(x+0.5)^2\,\dfrac{\left(2x^2-x-1\right)^3}{(2x+1)^5(3x-3)^2}$,
   10. $y = x^x$,
   11. $y = \ln\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)$,
   12. $y = a^{\log_b(x)}$,
   13. $y = \dfrac{\log_a\left(3x^2-2\right)}{3x-1}$,
   14. $y = e^{wx}\left[A\sin(ax)+B\cos(bx)\right]$,
   15. $y = \sin\left(\tan(x)\right)$,
   16. $y = x\arctan(x) - \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)$,
   17. $y = \cos\left[\arcsin\left(\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}\right)\right]$.

5 Badanie przebiegu funkcji

Własności funkcji a jej pochodne

funkcja rosnąca	$\iff$	$f'(x) > 0$
funkcja malejąca	$\iff$	$f'(x) < 0$
ekstremum funkcji	$\iff$	$f'(x) = 0$
funkcja wypukła	$\iff$	$f''(x) > 0$
funkcja wklęsła	$\iff$	$f''(x) < 0$
punkt przegięcia	$\iff$	$f''(x) = 0$
miejsca zerowe	x_i:	$f(x_i) = 0$
maksimum	x_{max}:	$f'(x_{max}) = 0,\ f''(x_{max}) < 0$
minimum	x_{min}:	$f'(x_{min}) = 0,\ f''(x_{min}) > 0$
punkt przegięcia	x_{przeg}:	$f''(x_{przeg}) = 0$



Pewne twierdzenia dotyczące pochodnych

- **Twierdzenie Darboux**
  Jeżeli funkcja $f(x)$ ma pochodną skończoną na $[a, b]$, to funkcja $f'(x)$ przyjmuje przynajmniej raz każdą wartość pomiędzy wartościami $f'(a)$ i $f'(b)$.
- **Twierdzenie Lagrange'a** – o wartości średniej rachunku różniczkowego
  Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła na $[a, b]$ i ma pochodną skończoną na (a, b), to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.
- **Twierdzenie Cauchy'ego** – uogólnione twierdzenie o wartości średniej rachunku różniczkowego
  Jeżeli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są ciągłe na $[a, b]$, mają pochodne skończone na (a, b), oraz $g'(x) \neq 0$ na (a, b), to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Wyrażenia nieoznaczone

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = b \neq 0 \quad \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{a}{b}.$$

Co jeśli $b = 0$, ale także $a = 0$? Wyrażenie nieoznaczone $\dfrac{0}{0}$ (zapis symboliczny). Podobnie symbolicznie: $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$.

Reguły de l'Hospitala

$$\boxed{\frac{0}{0}}: \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\boxed{\frac{\infty}{\infty}}: \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} \to \frac{0}{0} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\boxed{0 \cdot \infty}: \quad f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \quad \to \quad \frac{0}{0} \text{ lub } \frac{\infty}{\infty}$$

$$\boxed{\infty - \infty}: \quad f(x) - g(x) = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x)} \cdot \frac{1}{f(x)}} \quad \to \quad \frac{0}{0}$$

Asymptoty

- zbieżność do prostej równoległej do osi układu
  $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = a, \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$
- zbieżność do dowolnej prostej
  $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = ax + b, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = a$
  $g(x) = f(x) - ax - b, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$
- zbieżność do innej (prostszej) funkcji
  $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \varphi(x),$
  $g(x) = f(x) - \varphi(x), \qquad \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$

Badanie przebiegu funkcji

- dziedzina (osobliwości x_s) – definicja $f(x)$,
- przeciwdziedzina – definicja $f(x)$,
- szczególne własności (symetrie), np. parzystość, periodyczność – definicja $f(x)$,
- punkty nieciągłości (osobliwości) – $\lim_{x\to x_s} f(x)$,
- zachowania asymptotyczne – $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$,
- miejsca zerowe – $f(x_0) = 0$,
- obszary wzrostu i spadku wartości funkcji – znak $f'(x)$,
- ekstrema – $f'(x_e) = 0$,
- wklęsłość i wypukłość funkcji, charakter ekstremów – znak $f''(x)$,
- punkty przegięcia – $f''(x_p) = 0$.

Zadania

Wyznaczyć następujące granice:

1. $\lim\limits_{x\to\pm 2} \frac{x^4+4x^3-16x-16}{x^3+2x^2-4x-8}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-e^{-3x}}{\sin(2x)}$
3. $\lim\limits_{x\to\pm\pi} \frac{\sin(x^2+\pi(\pi-2x))}{\cos(3x)+1}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{\sin(x)+x}$
5. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{1+x^{\frac{1}{3}}}{1+x^{\frac{1}{5}}} = \frac{5}{3}$
6. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x}$
7. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+2x+3)}{x-1}$
8. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^p e^{ax}$ (wszystkie przypadki a i p)
9. $\lim\limits_{x\searrow 0} [x\ln(x)]$
10. $\lim\limits_{x\searrow 0} \left[\ln(x)+\frac{1}{x}\right]$
11. $\lim\limits_{x\to 1} \left[\frac{3}{x^3-1}+\frac{5}{1-x^5}\right]$

Zbadać przebieg funkcji:

12. $y=\frac{1}{1+x^2}$
13. $y=\frac{x}{1+x^2}$
14. $y=\frac{x^2}{1+x^2}$
15. $y=\frac{x^3}{1+x^2}$
16. $y=\frac{2x^2+x-1}{x^2-2x+2}$
17. $y=\frac{1}{1-x^2}$
18. $y=\frac{x}{1-x^2}$
19. $y=\frac{x^2}{1-x^2}$
20. $y=\frac{x^3}{1-x^2}$
21. $y=\frac{2x^2+x-1}{x^2-2x+2}$
22. $y=\frac{6x^2+15x+5}{4x^2-11x-3}$
23. $y=x\,e^{2x}$
24. $y=x^2\,e^{2x}$
25. $y=\exp(\frac{2}{x})$
26. $y=x\cdot\exp(\frac{2}{x})$
27. $y=x^2\cdot\exp(\frac{2}{x})$
28. $y=x\pm\arctan(2x)$
29. $y=x\cdot\arctan(2x)$
30. $y=\frac{1}{x}\cdot\arctan(2x)$
31. $y=x\sqrt{(1-x^2)}$
32. $y=\frac{x}{\sqrt{(x^2-4)}}$
33. $y=\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{(x-2)^2}$
34. $y=e^x\cos(\sqrt{3}x)$

6 Całka nieoznaczona

Funkcja pierwotna

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}\,, \qquad \int dx f(x) = F(x) + \text{const}$$

Związek z pochodną

$$\frac{d}{dx}\int dx f(x) = f(x)\,, \qquad \int dx \frac{df(x)}{dx} = f(x) + \text{const}$$

Liniowość

$$\int dx\,[af(x) + bg(x)] = a\int dx f(x) + b\int dx g(x)$$

Całkowanie przez części

$$\int dx f'(x)g(x) = f(x)g(x) - \int dx f(x)g'(x)$$

Całkowanie przez podstawienie (zamianę zmiennych)

$$\int dx f(x) = \int dy f\left(g(y)\right) g'(y)\ , \text{ gdzie } x = g(y)$$

Typowe podstawienia

$$\begin{aligned}
\int dx\, x\, f(x^2) &= \textstyle\int dy\, f(y), && \text{gdzie} && y = x^2 \\
\int dx\, e^x\, f(e^x) &= \textstyle\int dy\, f(y), && \text{gdzie} && y = e^x \\
\int dx\, \cos(x)\, f(\sin(x)) &= \textstyle\int dy\, f(y), && \text{gdzie} && y = \sin(x) \\
\int dx\, h'(x)\, f(h(x)) &= \textstyle\int dy\, f(y), && \text{gdzie} && y = h(x)
\end{aligned}$$

Całkowanie funkcji wymiernych $f(x) = \dfrac{V_m(x)}{W_n(x)}$ **dla** $n = 1, 2$

(wyrażenia typu $W_n(x)$, $V_m(x)$, ... oznaczają wielomiany stopnia n, m, ...)

I. jeśli $m \geqslant n$, to dzielimy licznik przez mianownik $f(x) = P_{m-n}(x) + \dfrac{U_{n-1}(x)}{W_n(x)}$,

II. jeśli $n = 1$, to całkujemy ułamek $\dfrac{U_0(x)}{W_1(x)}$ przez podstawienie $y = W_1(x)$,

III. jeśli $n = 2$, to badamy rozwiązania równania $W_2(x) = 0$,

1. jeśli istnieją rozwiązania x_1, x_2, to:
   a. faktoryzujemy mianownik $W_2(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
   b. rozkładamy $\dfrac{U_1(x)}{W_2(x)}$ na ułamki proste,
   c. postępujemy jak w p. II
2. jeśli nie istnieją rozwiązania to:
   a. przedstawiamy licznik jako $aW_2'(x) + b$, gdzie a, b – odpowiednie stałe
   b. całkujemy $a\dfrac{W_2'(x)}{W_2(x)}$ przez podstawienie $y = W_2(x)$,
   c. w ułamku $\dfrac{b}{W_2(x)}$ przedstawiamy mianownik w postaci kanonicznej $W_2(x) = a(x - p)^2 + q$,
   d. przekształcamy mianownik do postaci $W_2(x) = q\left[\left(\sqrt{\dfrac{a}{q}}(x - p)\right)^2 + 1\right]$,
   e. całkujemy ułamek przez podstawienia $y = \sqrt{\frac{a}{q}}(x - p)$

Zadania

1. Obliczyć całki nieoznaczone wszystkich funkcji elementarnych.
2. Obliczyć poniższe całki. Jeżeli w którejś pojawia sie parametr a, b, itd, to całkując rozważyć wszystkie możliwe wrtości parametru(trów).

1. $\int dx \frac{1}{3-2x}$
2. $\int dx \frac{x}{3-2x}$
3. $\int dx \frac{x^2}{3-2x}$
4. $\int dx \frac{x^3}{3-2x}$
5. $\int dx \frac{1}{1+x^2}$
6. $\int dx \frac{x}{1+x^2}$
7. $\int dx \frac{x^2}{1+x^2}$
8. $\int dx \frac{x^3}{1+x^2}$
9. $\int dx \frac{x^2}{4+x^6}$
10. $\int dx \frac{1}{3+2\sqrt{x}}$
11. $\int dx \frac{\sqrt{x}}{3+2x}$
12. $\int dx \frac{\sqrt{x}}{3+2\sqrt{x}}$
13. $\int dx \frac{\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+2x}$
14. $\int dx \frac{x}{\sqrt{4x^2+1}}$
15. $\int dx \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$
16. $\int dx \frac{1}{\sqrt{3-2x^2}}$
17. $\int dx \frac{x}{\sqrt{3-2x^2}}$
18. $\int dx \frac{x^2}{\sqrt{3-2x^2}}$
19. $\int dx \frac{x^3}{\sqrt{3-2x^2}}$
20. $\int dx \frac{x\sqrt{x}-2x^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}-\sqrt{x}}$
21. $\int dx \frac{2x^{\frac{3}{2}}-3x}{\sqrt[3]{x}}$
22. $\int dx \frac{3}{9x^2+4}$
23. $\int dx \frac{3x}{9x^2+4}$
24. $\int dx \frac{3x^2}{9x^2+4}$
25. $\int dx \frac{1}{x^2+3x-4}$
26. $\int dx \frac{x}{x^2+3x-4}$
27. $\int dx \frac{x^2}{x^2+3x-4}$
28. $\int dx \frac{4x+6}{x^2+3x-4}$
29. $\int dx \frac{1}{x^2-4x+5}$
30. $\int dx \frac{x}{x^2-4x+5}$
31. $\int dx \frac{x^2}{x^2-4x+5}$
32. $\int dx \frac{7x}{2x^2-5x-3}$
33. $\int dx \frac{1+x}{2x^2+4x+3}$
34. $\int dx \frac{x^2}{x^2+3x-4}$
35. $\int dx \frac{x^2+2x+6}{2x^2-5x-3}$
36. $\int dx \frac{x^3+1}{x^2-5x-6}$
37. $\int dx \ \cos^2 x$
38. $\int dx \ \cos^3 x$
39. $\int dx \ \cos^4 x$
40. $\int dx \ x\sin x$
45. $\int dx \ x\sin(2x^2-3)$
46. $\int dx \ (2x^2-3)\sin x$
47. $\int dx \ \frac{\cos x}{1+4\sin x}$
48. $\int dx \ \frac{\cos x}{1+4\sin^2 x}$
49. $\int dx \ \frac{\sin(2x)}{4-\cos^2 x}$
50. $\int dx \ \frac{1}{1+\cos 2x}$
51. $\int dx \ \frac{1}{1+\cos x}$
52. $\int dx \ \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos 2x}}$
53. $\int dx \ \frac{e^x}{2+3e^x}$
54. $\int dx \ \frac{e^{2x}+e^{-x}}{1+2e^{2x}}$
55. $\int dx \ xe^x$
56. $\int dx \ x^2 e^x$
57. $\int dx \ x\, e^{x^2}$
58. $\int dx \ x\ln x$
59. $\int dx \ \ln(x^2-3)$
60. $\int dx \ x^2\ln x$
61. $\int dx \ x\ln(x^2)$
62. $\int dx \ x(\sin x)^2$
63. $\int dx \ x^2(\cos x)^2$
64. $\int dx \ [x\,(\cos(x^2))]^3$
69. $\int dx \frac{\cot x}{\sqrt{\cot^2 x+1}}$
70. $\int dx \ x^2 \ \arctan(2x)$
71. $\int dx \ \cos x \ \arccos(\sin x)$
72. $\int dx \ \cos x \ \arccos(\sin 2x)$
73. $\int dx \ \sin x \ \arccos(\sin 3x)$
74. $\int dx \frac{3x^3-7x^2+2x+4}{3x^2-4x-4}$
75. $\int dx \frac{3x^3-2x^2+5x+1}{5x^2+2x+1}$
76. $\int dx \frac{6x^4}{3x^2+6x+7}$
77. $\int dx \frac{x^4-2x^3+3x^2-4x+7}{2x^2-5x-3}$
78. $\int dx \frac{-2x^2+2x}{x^3-3x^2+4x-2}$
79. $\int dx \frac{9x^3-9x^2+8x-4}{6x^3-10x^2+7x-2}$
80. $\int dx \frac{7x^2(x^2+x-5)}{6x^2-11x+2}$
81. $\int dx \frac{7x^2(x^2+x-5)}{6x^2-11x+2}$
82. $\int dx \frac{5x^4-bx^3-10x^2+7x}{5x^3-3x^2-8x}$
83. $\int dx \ \frac{[5+6\cos(2x)]\sin x}{4-\cos^2 x}$
84. $\int dx \ (2x-3)\, e^{2x^2-6x}$
85. $\int dx \ (2x^2-6x)\, e^{2x-3}$
86. $\int dx \ \tan(x)\ \ln(\cos x)$
87. $\int dx \ \left(3x+\frac{x^3}{3}\right)^{-1} \cdot \frac{x}{1+\operatorname{arccot}(\frac{x}{3})}$
88. $\int dx \ \sin(ax)\cos(bx)$

41. $\int dx\, x \sin x \cos x$	65. $\int dx\, x\, \arccos x$	89. $\int dx\, \sin x \cos x\, e^{-3x}$
42. $\int dx\, x \sin^2 x \cos x$	66. $\int dx\, x^2\, \arccos x$	90. $\int dx\, \arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right)$
43. $\int dx\, x^2 \sin x$	67. $\int dx\, \frac{\arctan(2x)}{1+4x^2}$	91. $\int dx\, e^{ax}\, [b \sin(wx) + c \cos(wx)]$
44. $\int dx\, x^2 \sin x \cos x$	68. $\int dx \frac{\cot(x)}{1-\cos(2x)}$	92. $\int dx\, (e^{2x} + e^{-2x}) \arctan(e^x)$

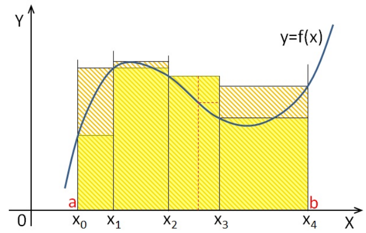
Pochodne i całki funkcji elementarnych

UWAGA: zwrócić uwagę na dziedziny wszystkich funkcji oraz zakresy wartości parametru a !!!

$f(x)$	$\frac{d}{dx} f(x)$	$\int f(x) dx$ (bez stałej całkowania)
x^a	ax^{a-1}	$\begin{cases} (a+1)^{-1} x^{a+1} & (a \neq -1) \\ \ln \lvert x \rvert & (a = -1) \end{cases}$
e^x	e^x	e^x
a^x	$a^x (\ln a)$	$a^x (\ln a)^{-1}$
$\ln x$	x^{-1}	$x \ln x - x$
$\log_a x$	$x^{-1} (\ln a)^{-1}$	$x \log_a x - x (\ln a)^{-1}$
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$
$\tan x$	$(\cos x)^{-2}$	$-\ln \lvert \cos x \rvert$
$\cot x$	$-(\sin x)^{-2}$	$\ln \lvert \sin x \rvert$
$\arcsin x$	$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$	$x \arcsin x + (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$
$\arccos x$	$-(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$	$x \arccos x - (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$
$\arctan x$	$(1+x^2)^{-1}$	$x\, \arctan x - \frac{1}{2} \ln (1+x^2)$
$\operatorname{arccot} x$	$-(1+x^2)^{-1}$	$x \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2} \ln (1+x^2)$

7 Całka oznaczona

Problem - pole trapezu krzywoliniowego:



Jakie jest pole powierzchni zawartej pomiędzy krzywą $y = f(x)$, osią OX, oraz prostymi równoległymi do osi OY przechodzącymi przez punkty $x = a$ i $x = b$?

$P \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \cdot f(\tilde{x}_k), \qquad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \quad \tilde{x}_k \in [x_{k-1}, x_k]$

Suma i całka Riemanna

$$P = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \cdot f(\tilde{x}_k) = \int\limits_a^b dx f(x) \qquad \text{(całka oznaczona, a i b - dolna i górna granica całkowania)}$$

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \max\{\Delta x_k\} = 0$
2. granica nie zależy od sposobu podziału odcinka (a, b)
3. granica nie zależy od punktów, w których liczone są wartości $f(x)$

Podstawowe własności

$$\int_a^a dx f(x) = 0\,, \quad \int_a^b dx f(x) = -\int_b^a dx f(x)\,, \quad \int_a^b dx f(x) = \int_a^c dx f(x) + \int_c^b dx f(x)$$

$$f(x) \geqslant 0 \ \text{ dla } \ x \in (a, b) \ \Rightarrow \int_a^b dx f(x) \geqslant 0$$

$$f(x) \geqslant g(x) \ \text{ dla } \ x \in (a, b) \ \Rightarrow \int_a^b dx f(x) \geqslant \int_a^b dx g(x)$$

Twierdzenie o wartości średniej

Jeśli $f(x)$ jest ciagła i ograniczona na (a, b), to:

$$\int_a^b dx\, f(x) = f(\widetilde{x})(b - a)\,, \ \text{ dla pewnego } \ \widetilde{x} \in [a, b]$$

Podstawowy wzór rachunku całkowego

$$\frac{d}{dx} \int_a^x dy\, f(y) = f(x)$$

$$\int_a^b dx\, f(x) = F(b) - F(a)\,, \ \text{ gdzie } \ \int dx\, f(x) = F(x) + C$$

Całkowanie przez podstawienie (zamianę zmiennych)

Jeśli $x = g(y)$ jest funkcją wzajemnie jednoznaczną, to:

$$\int_a^b dx\, f(x) = \int_u^v dy f\left(g(y)\right) g'(y)\,, \ \text{ gdzie } \ u = g^{-1}(a)\,,\, v = g^{-1}(b)$$

Całki niewłaściwe

Jeśli obszar całkowania jest nieograniczony $[a, \infty]$, $[\infty, b]$,$[\infty, \infty]$, to:

$$\int_a^{\infty} dx f(x) = \lim_{b\to\infty} \int_a^b dx f(x); \quad \int_{-\infty}^b dx f(x) = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b dx f(x); \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) = \lim_{a\to-\infty} \lim_{b\to\infty} \int_a^b dx f(x)\,.$$

Jeśli w przedziale całkowania $[a, b]$ funkcja jest nieograniczona, tzn. $\underset{c\in[a,b]}{\exists} \lim\limits_{x\to c} f(x) \to \pm\infty$, to:

$$\int_a^b dx f(x) = \lim_{c_1 \nearrow c} \int_a^{c_1} dx f(x) + \lim_{c_2 \searrow c} \int_{c_2}^b dx f(x)$$

$$\text{Jeśli } c = a\,, \ \text{ to } \int_a^b dx\, f(x) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{a+\epsilon}^b dx\, f(x); \quad \text{jeśli } c = b\,, \ \text{ to } \int_a^b dx\, f(x) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} dx\, f(x)\,.$$

Zadania

Obliczyć następujące całki oznaczone :

1. $\int_{-2}^{2} dx\, x$
2. $\int_{-2}^{2} dx\, x^2$
3. $\int_{-2}^{2} dx\, x^3$
4. $\int_{1}^{4} dx\, \sqrt{2x+1}$
5. $\int_{0}^{1} dx\, \sqrt{1-x^2}$
6. $\int_{0}^{2} dx\, (x^3+x)\sqrt{x^2+1}$
7. $\int_{0}^{-\frac{1}{2}} dx\, \frac{1}{2+8x^2}$
8. $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{1}{a^2+x^2}$
9. $\int_{1}^{\infty} dx\, \frac{1-x}{(x^2-2x+2)^2}$
10. $\int_{1}^{\infty} dx\, \frac{1-x}{(x^2-2x+1)^3}$
11. $\int_{0}^{3} dx\, \frac{\sqrt{x+1}+1}{(x+1)^2+\sqrt{1+x}}$
12. $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} dx\, \frac{e^{2x}}{1+e^x}$
13. $\int_{0}^{\infty} dx\, e^{-x}$
14. $\int_{0}^{\infty} dx\, xe^{-x}$
15. $\int_{0}^{\infty} dx\, e^{-ax}\ ,\ \ a>0$
16. $\int_{0}^{\infty} dx\, xe^{-ax}\ ,\ \ a>0$
17. $\int_{0}^{\infty} dx\, x^2e^{-ax}\ ,\ \ a>0$
18. $\int_{0}^{\infty} dx\, xe^{-ax^2}\ ,\ \ a>0$
19. $\int_{0}^{1} dx\, \frac{e^{3\ln x}}{\sqrt{2+x^4}}$
20. $\int_{-1}^{1} dx\, x\,10^x$
21. $\int_{\frac{1}{e}}^{e} dx\, \frac{1}{x+x\ln x}$
22. $\int_{1}^{2} dx\, \frac{\ln(\pi x)}{x^2}$
23. $\int_{\frac{1}{e}}^{e} dx\, \frac{1}{x(\ln x)^2+x}$
24. $\int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{\sqrt{e}} dx\, \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{1-(\ln x)^2}}$
25. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx\, \cos^3(x)$
26. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx\, \sin^3(x)$
27. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} dx\, \cos^3(x)$
28. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} dx\, \sin^5(x)$
29. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} dx\, \cos(2x)\sin(3x)$
30. $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} dx\, \frac{\cos(2x)}{\sin^2 x}$
31. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} dx\, \frac{\cos^2(2x)}{\sin(4x)}$
32. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx\, \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}$
33. $\int_{0}^{\left(\frac{\pi}{6}\right)^2} dx\, \frac{1}{\sqrt{x}}\sin(\sqrt{4x})$
34. $\int_{0}^{1/3} dx\, x\cos(3\pi x)$
35. $\int_{0}^{\infty} dx\, e^{-2x}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$
36. $\int_{0}^{1} dx\, \arccos\left(\frac{1}{2}x\right)$
37. $\int_{\sqrt{3}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} dx\, \frac{1}{(1+x^2)\mathrm{arccot}x}$
38. $\int_{0}^{\frac{1}{2}} dx\, \mathrm{artan}(2x)$
39. $\int_{-1/2}^{1} dx\, (4x-3)\mathrm{arcos}(x)$
40. $\int_{0}^{-2} dx\, \frac{\arctan\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2+4}$
41. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} dx\, \left[x\sin x+\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]\ln\left(\frac{x}{\pi}\right)$

8 Równania różniczkowe

Równanie różniczkowe zwyczajne rzędu n

$$F\left(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y^{(1)}, y, x\right) = 0$$

x - zmienna niezależna,
y - nieznana różniczkowalna funkcja x, zmienna zależna $y = y(x)$

Rozwiązanie (scałkowanie) równania różniczkowego oznacza znalezienie wszystkich funkcji $y(x)$ spełniających to równanie.

rozwiązanie ogólne (o) $y_o = y_o(x; C_1, \dots, C_n)$ - rodzina funkcji zmiennej x sparametryzowana przez n stałych całkowania $\{C_j\}_{j=1}^n$

rozwiązanie szczególne (s) $y_s = y_s(x)$ - jedna z funkcji z rodziny funkcji y_o o konkretnej wartości przynajmniej jednego z parametrów C_j

Równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu $F(y', y, x) = 0$

rozwiązanie ogólne (o) $y_o = y_o(x; C)$ - rodzina funkcji zmiennej x sparametryzowana przez C (stałą całkowania)

rozwiązanie szczególne (s) $y_s = y_s(x)$ - jedna z funkcji z rodziny $y_o(x; C)$ o konkretnej wartości parametru C

Równanie o rozdzielonych zmiennych $F(y', y, x) \equiv f(y)y' - g(x) = 0$

$$f(y)y' = g(x) \quad \Rightarrow \quad \int dx f(y)y' = \int dy f(y) = \int dx g(x)$$