Równaniami różniczkowymi nazywamy takie równania, w których występuje związek funkcji niewiadomej i jej pochodnych

$$y''' - 8y'' + 19y' - 12y = 0$$

$x^2 y'' + xpy' + qy = 0$ (*p*, *q* – stałe)

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\psi)$$

a szukaną niewiadomą (rozwiązaniem) jest funkcja lub wektor funkcyjny, których pochodne i same funkcje muszą spełniać odpowiednie równania.

Rząd równania różniczkowego to rząd najwyższej pochodnej.

R.R zwyczajne (jednej zmiennej niezależnej)

R.R cząstkowe (wielu zmiennych)

Równania różniczkowe zwyczajne

Ogólną postać zwyczajnego równania różniczkowego można przedstawić w postaci:

$$\boxed{F(y^{(n)}(x), y^{(n-1)}(x), \ldots, y'(x), y(x), x) = 0} \qquad x \in R$$

$y(x)$ - niewiadoma funkcja zmiennej rzeczywistej x

$y^{(n)}(x) = \dfrac{d^{(n)}y(x)}{dx^n}$ - pochodna rzędu „n” funkcji f(x)

Rząd najwyższej pochodnej występującej w równaniu nazywamy <u>rzędem</u> równania.

Równania różniczkowe są spotykane praktycznie we wszystkich dziedzinach nauk ścisłych i przyrodniczych a szczególnie w:

- Fizyce (np. równania Maxwell'a, równania ruchu, mechanice kwantowej, …)
- Mechanice (np. równania ruchu harmonicznego)
- Elektronice (np. stany nieustalone w obwodach elektrycznych)
- Automatyce (np. warunki sterowalności układu)
- i wielu innych dziedzinach nauki i techniki

Ograniczymy się do metod numerycznych rozwiazywania równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego (**zagadnienie Cauchy'ego)**

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

równania wyższych rzędów da się sprowadzić do równania rzędu pierwszego i układów równań różniczkowych.

Przykłady

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 1.3e^{-x}, \quad y(0) = 5$$

$$\frac{dy}{dx} = 1.3e^{-x} - 2y, \quad y(0) = 5$$

$$f(x, y) = 1.3e^{-x} - 2y$$

$$e^{y}\frac{dy}{dx} + x^2 y^2 = 2\sin(3x), \quad y(0) = 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\sin(3x) - x^2 y^2}{e^{y}}, \quad y(0) = 5$$

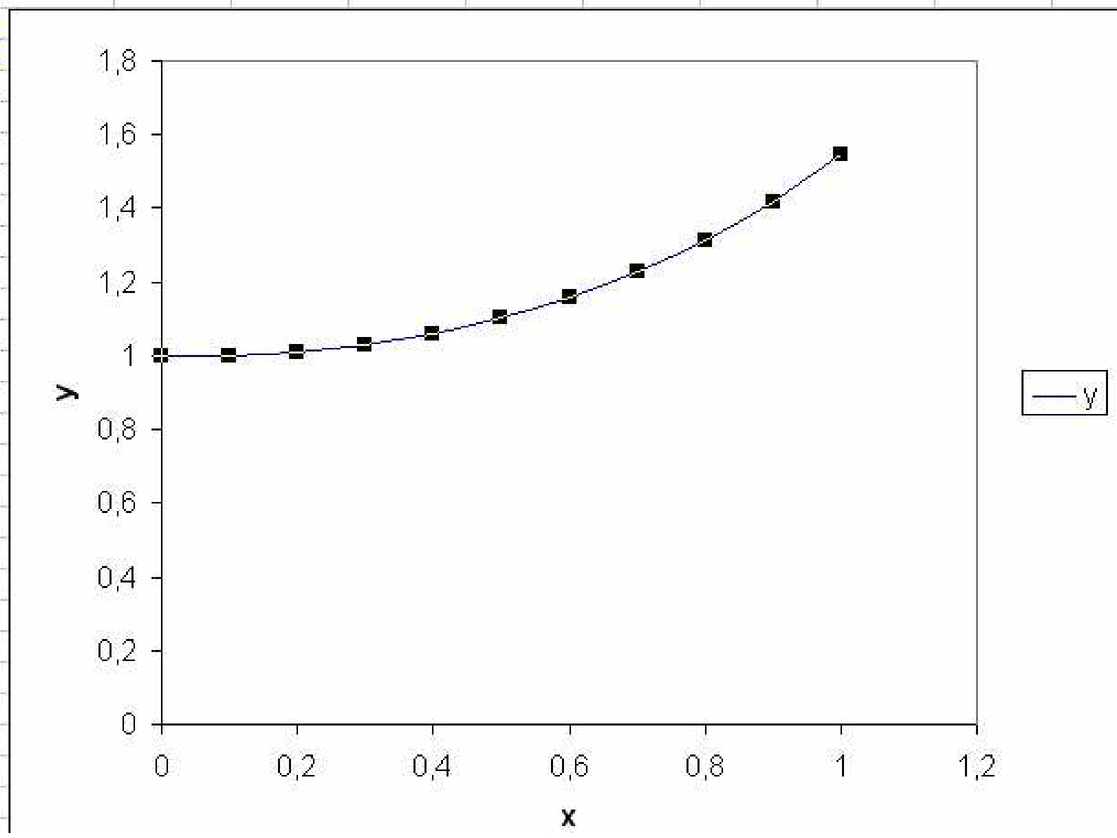
$$f(x, y) = \frac{2\sin(3x) - x^2 y^2}{e^{y}}$$

Numeryczne rozwiązanie równania różniczkowego – zbiór punktów, które przybliżają funkcję *y(x)* – możliwość obliczenia(podania) wartości funkcji *y(x)* w „dowolnym” punkcie innym niż x_0.

$y' = xy$

$y(0) = 1$

h	0,1		
i	x	y	Euler
0	0	1	0
1	0,1	1	0,01
2	0,2	1,01	0,0202
3	0,3	1,0302	0,030906
4	0,4	1,061106	0,042444
5	0,5	1,10355	0,055178
6	0,6	1,158728	0,069524
7	0,7	1,228251	0,085978
8	0,8	1,314229	0,105138
9	0,9	1,419367	0,127743
10	1	1,54711	0,154711



Metoda Eulera pozwala na numeryczne rozwiązanie równania różniczkowego zwyczajnego rzędu pierwszego postaci:

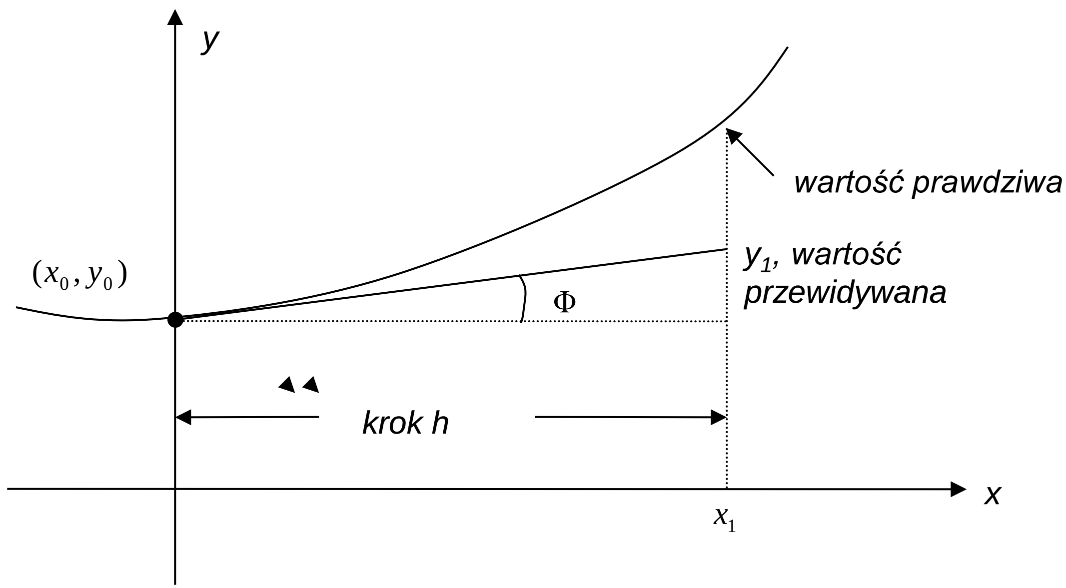
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

numerycznie wyznaczamy rozwiązanie równania różniczkowego w postaci tabeli x, y oraz wykresu y(x).

Aby rozwiązać to równanie, musimy znaleźć wartości funkcji $y=y(x)$ w $x=x_n=x_0+nh$.

Zakładamy, że kolejne punkty rozwiązania oddalone są od siebie na osi x co krok h, a na osi y co Δy

Dla x = x_0 = 0 wartość y = y_0



Znając f(x, y) i mając dane wartości x_0 i y_0 z warunku początkowego $y(x_0) = y_0$ można obliczyć **nachylenie funkcji** y do osi X (wartość f(x, y)) w punkcie (x_0, y_0)

$$\tan\Phi = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = f(x_0, y_0)$$

Po przekształceniu otrzymujemy:

$$y_1 = y_0 + f\left(x_0, y_0\right)\left(x_1 - x_0\right)$$

Oznaczając x_1-x_0 jako krok h otrzymujemy:

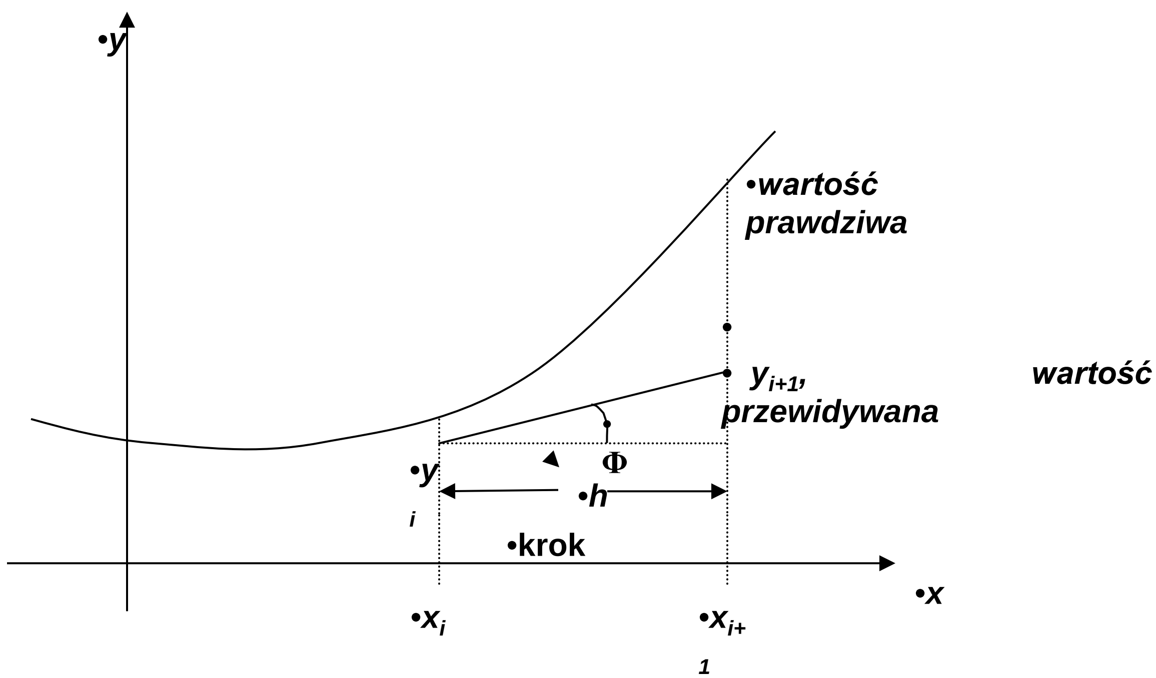
$$y_1 = y_0 + f\left(x_0, y_0\right)h$$

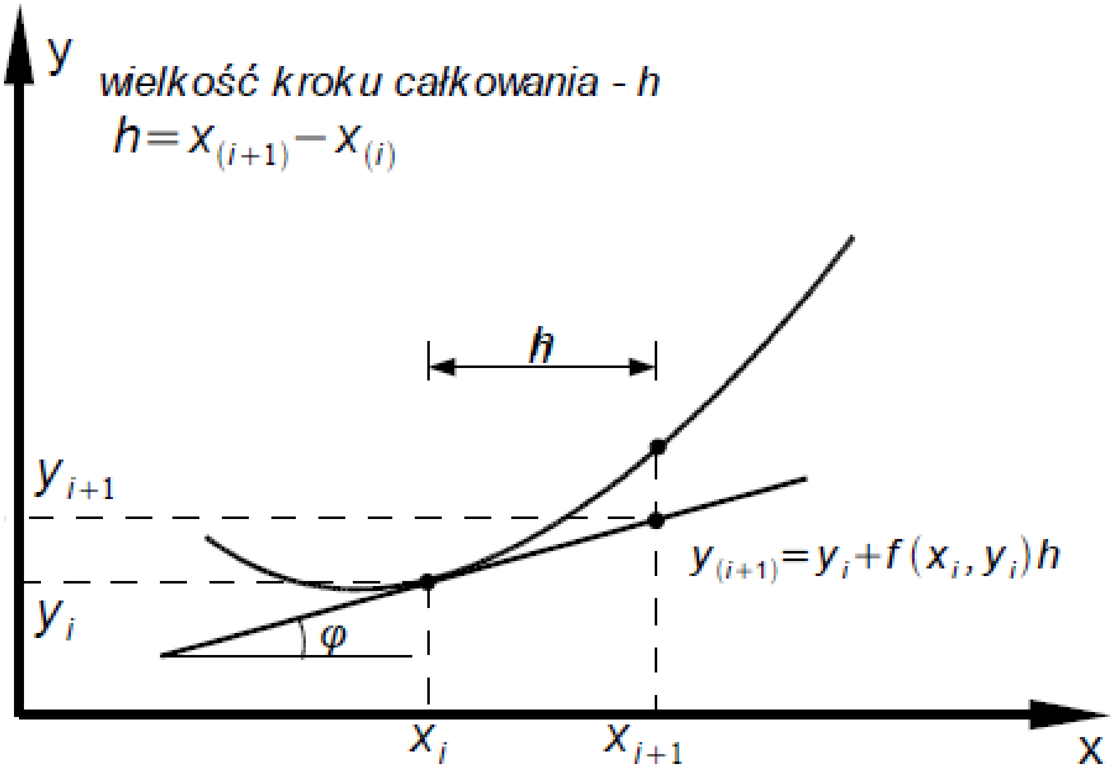
Wykorzystując obliczaną wartość y_1 można obliczyć wartość y_2 dla x_2 jako:

$$y_2 = y_1 + f\left(x_1, y_1\right)h \qquad x_2 = x_1 + h$$

Można zatem wyprowadzić wzór rekurencyjny:

$$y_{i+1} = y_i + f\left(x_i, y_i\right)h$$




y
wielkość kroku całkowania - h
$h = x_{(i+1)} - x_{(i)}$
h
y_{i+1}
y_i
φ
$y_{(i+1)} = y_i + f(x_i, y_i)h$
x_i
x_{i+1}
x

$$x_{n+1} = x_n + h \qquad\qquad y_{n+1} = y_n + \Delta y$$

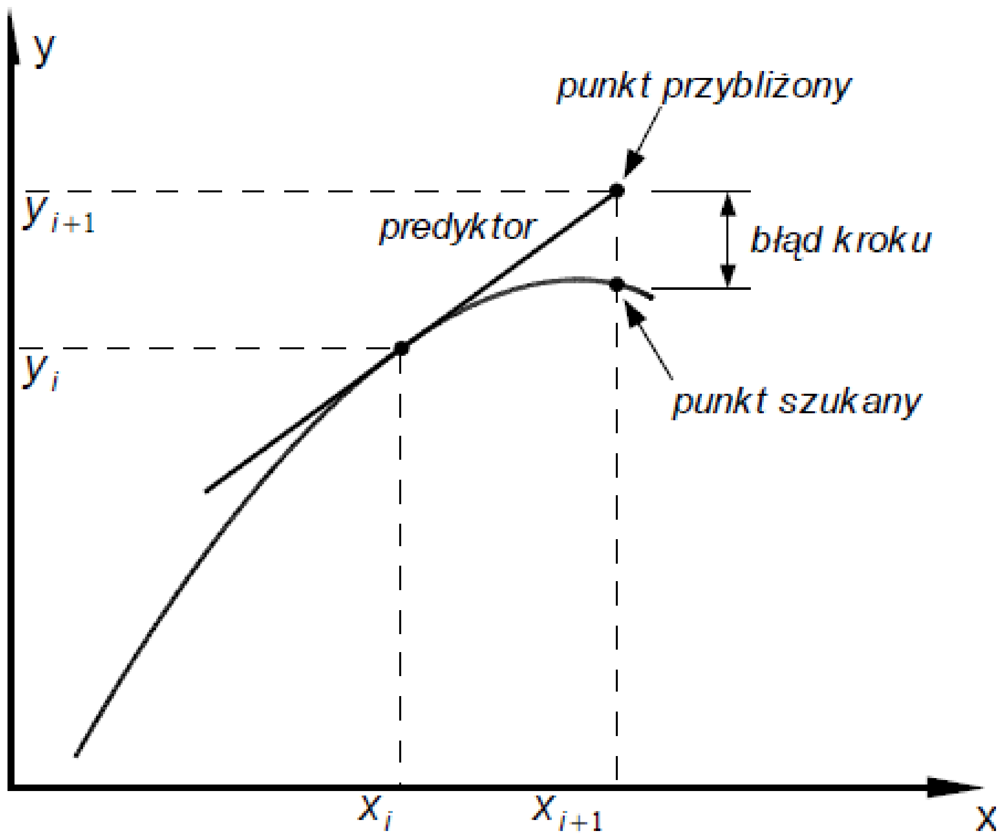
Z definicji pochodnej (jako tangens kąta nachylenia stycznej) wiemy, że:

$$y' = \frac{\Delta y}{h}$$

$$f\left(x_n, y_n\right) = y' = \frac{\Delta y}{h}$$

$$\Delta y = h \cdot f\left(x_n, y_n\right)$$

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + f\left(x_n, y_n\right)h}$$



Rys.1.2 Interpretacja graficzna metody Eulera

Alternatywnie:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} dy = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx$$

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx$$

Obliczając całkę metodą prostokątów (!!! – jawna i niejawna met. Eulera)

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \longrightarrow y_{n+1} - hf(x_{n+1}, y_{n+1}) = y_n$$

Przykład:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = -1.2y + 7e^{-0.3x} \qquad y = \frac{70}{9}e^{-0.3x} - \frac{43}{9}e^{-1.2x}$$

Przedział $0 \le x \le 2.5$ Warunek początkowy $y(0) = 3$. Krok $h = 0.5$

$$x_1 = 0 \qquad y_1 = 3$$

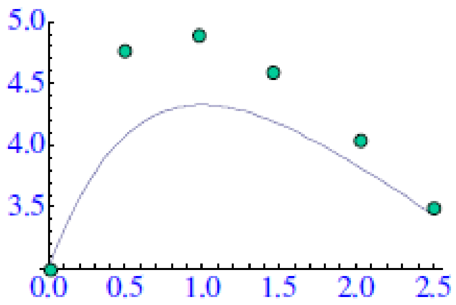
$$x_2 = x_1 + 0.5 = 0.5 \qquad y_2 = y_1 + 0.5(-1.2y_1 + 7e^{-0.3x_1}) = 4.7$$

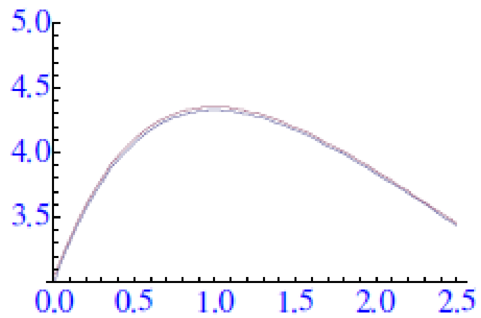
$$x_3 = x_2 + 0.5 = 1 \qquad y_3 = y_2 + 0.5(-1.2y_2 + 7e^{-0.3x_2}) = 4.893$$

$$x_4 = x_3 + 0.5 = 1.5 \qquad y_4 = y_3 + 0.5(-1.2y_3 + 7e^{-0.3x_3}) = 4.550$$

$$x_5 = x_4 + 0.5 = 2 \qquad y_5 = y_4 + 0.5(-1.2y_4 + 7e^{-0.3x_4}) = 4.052$$

$$x_6 = x_5 + 0.5 = 2.5 \qquad y_6 = y_5 + 0.5(-1.2y_5 + 7e^{-0.3x_5}) = 3.542$$





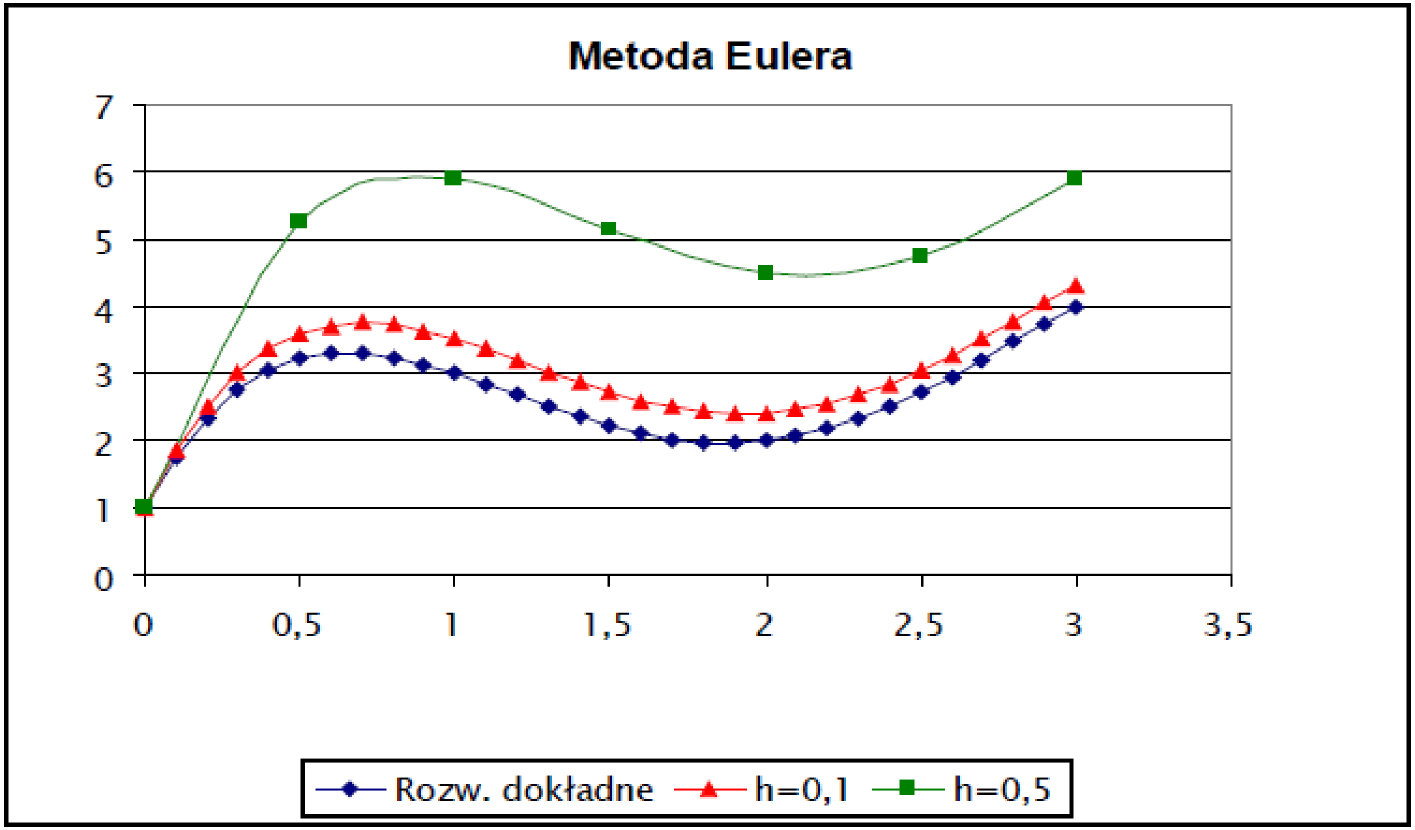
Przykład 2

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8{,}5$$

Znajdźmy rozwiązanie dla przedziału od x=0 do x=4 i warunku początkowego y(0)=1 i kroku całkowania h=0,5 i h=0,1.

$$y = -\frac{1}{2}x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8{,}5x + 1$$ Rozw. dokładne

$$y_{n+1} = y_n + f\left(x_n, y_n\right)h$$



Dokładność w met. Eulera zależy od h

Analiza błędów

Błędy zaokrągleń	Wynikają z arytmetyki zmiennoprzecinkowej w komputerze
Błędy obcięcia	Wynikają z przyjętego przybliżenia metody rozwiązywania równań.

Dwa rodzaje:

Błąd lokalny – związany w pojedynczym krokiem metody

Błąd akumulowany – związany z nawarstwianiem się błędów z poprzednich kroków.

Razem dają one całkowity błąd obcięcia.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(0) = y_0$$

Korzystając z rozwinięcie w szereg Taylora:

$$y_{i+1} = y_i + \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_i, y_i} (x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2!} \left.\frac{d^2 y}{dx^2}\right|_{x_i, y_i} (x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{1}{3!} \left.\frac{d^3 y}{dx^3}\right|_{x_i, y_i} (x_{i+1} - x_i)^3 + \ldots$$

$$= y_i + f(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2!} f'(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{1}{3!} f''(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i)^3 + \ldots$$

Obcinając pierwszym wyrazie

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) h$$

Błąd lokalny w jednym kroku jest proporcjonalny do kwadratu kroku (h^2).

$$E_a = \frac{f'(x_i, y_i) \cdot h^2}{2!}$$

Można wykazać, że błąd globalny (całkowity) jest proporcjonalny do pierwszej potęgi kroku.

Założenie, że nachylenie między punktami x_i i x_i*+1* jest stałe jest głównym źródłem błędów w metodzie Eulera. (zał. Metody prostokątów)

Konieczność zmniejszania h -> pojawiają się błędy zaokrąglenia, + dodatkowy koszt numeryczny - obliczenia dla wielu punktów

Przykład – kumulacja błędów
i stabilność jawna i niejawna metoda Eulera

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1009 & 2009 \\ -1010 & -2010 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \\ u(0) = 1\,, \\ v(0) = 0\,. \end{cases}$$

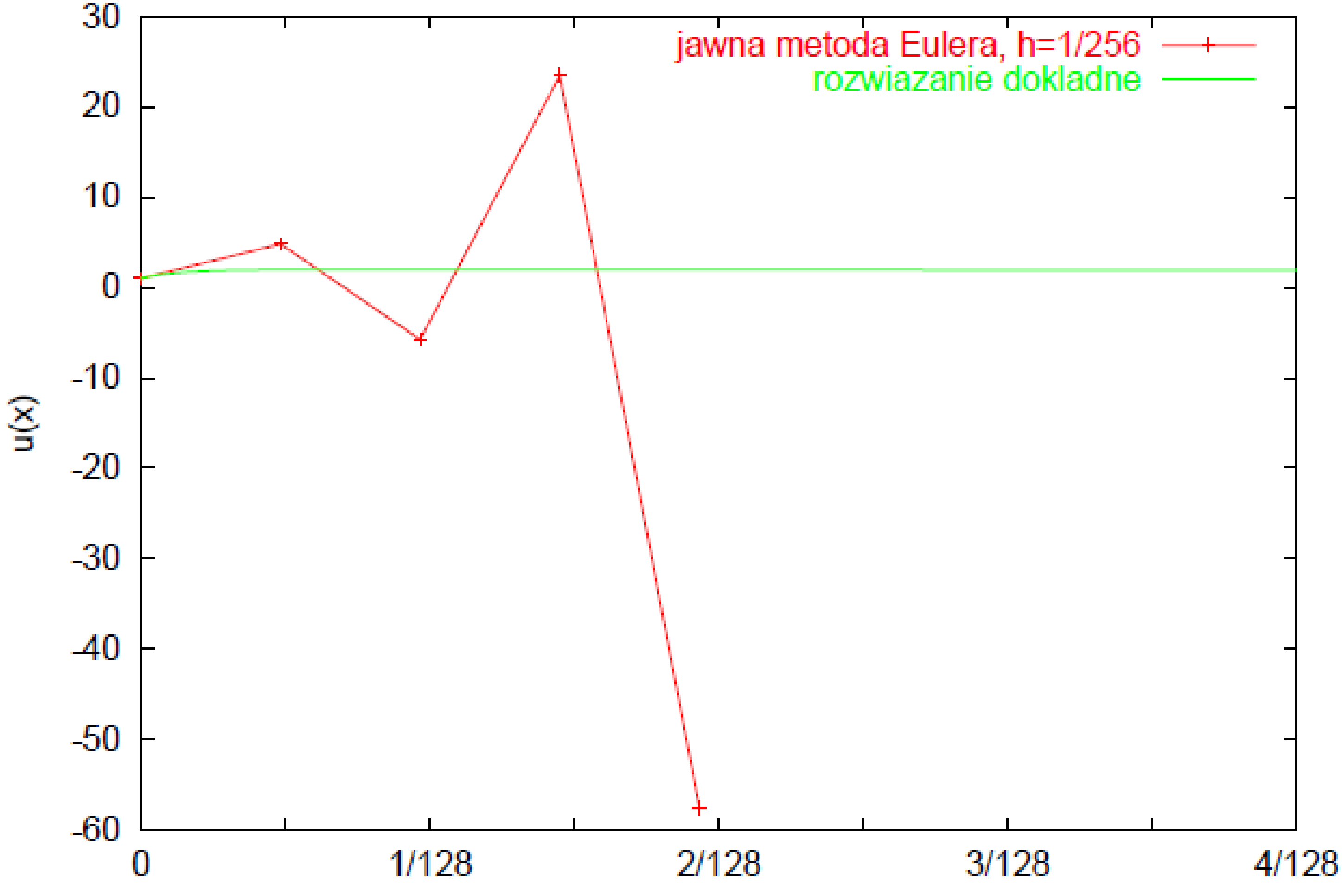
Analityczne rozwiązanie tego problemu ma postać

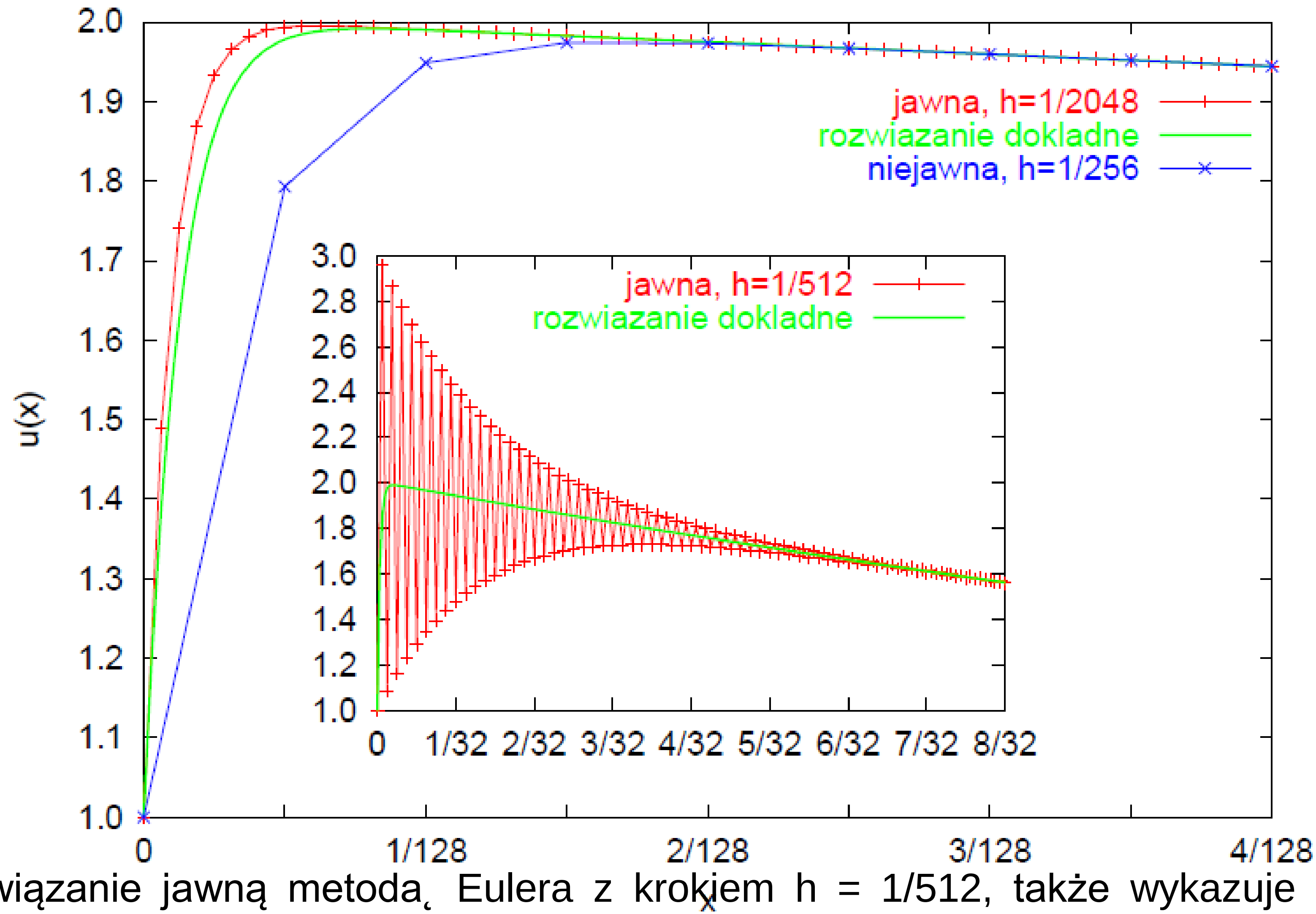
$$u(x) = \frac{2009}{999}e^{-x} - \frac{1010}{999}e^{-1000x}\,,$$

$$v(x) = \frac{1010}{999}e^{-x} - \frac{1010}{999}e^{-1000x}\,.$$

Jawna metoda Eulera z krokiem h = 1/256.

x	$u(x)$ jawna met. Eulera, $h = \frac{1}{256}$
0	1.00000000
1/128	4.78867912
2/128	-5.74808168
3/128	23.44808960
4/128	-57.55829240
5/128	167.09159900
6/128	-456.02206400
7/128	1272.20862000
8/128	-3521.21387000


jawna metoda Eulera, h=1/256
rozwiazanie dokladne
u(x)
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
0
1/128
2/128
3/128
4/128



Rozwiązanie jawną metodą Eulera z krokiem h = 1/512, także wykazuje silne oscylacje ale oscylacje te są tłumione. Jednocześnie jawna metoda Eulera z krokiem h=1/2048 oraz niejawna metoda Eulera z krokiem h=1/256 nie oscylują

i mimo początkowych odchyleń od rozwiązania dokładnego, zbiegają się do niego bardzo szybko.

Metody Rungego-Kutty

W metodach tych nachylenie szacowane jest na podstawie kilku punktów wewnątrz przedziału. Różne metody RK klasyfikowane są ze względu na ich rząd (odpowiadający liczbie punktów wziętych do szacowania nachylenia)

Np. metoda RK drugiego rzędu ma lokalny błąd obcięcia $O(h^3)$ i akumulowany błąd obcięcia $O(h^2)$.

Metody Rungego-Kutty drugiego rzędu

$$
\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + \left(c_1 K_1 + c_2 K_2\right) h \\
K_1 &= f\left(x_i, y_i\right) \\
K_2 &= f\left(x_i + a_2 h, y_i + b_{21} h K_1\right)
\end{aligned}
$$

Stałe c_1, c_2, a_2, b_{21} zależą od wybranej metody drugiego rzędu

Zmodyfikowana metoda Eulera w postaci metody RK drugiego rzędu

$$c_1 = \frac{1}{2},\ \ c_2 = \frac{1}{2},\ \ a_2 = 1,\ \ b_{21} = 1$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}\left(K_1 + K_2\right)h$$

$$K_1 = f(x_i, y_i)$$

$$K_2 = f(x_i + h, y_i + K_1 h)$$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + h\,\frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{Eu})}{2}}$$

Równania te można otrzymać całkując ogólne równanie różniczkowe zwyczajne za pomocą metody trapezów.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(0) = y_0$$

Korzystając z rozwinięcie w szereg Taylora:

$$y_{i+1} = y_i + \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_i, y_i} (x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2!} \left.\frac{d^2 y}{dx^2}\right|_{x_i, y_i} (x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{1}{3!} \left.\frac{d^3 y}{dx^3}\right|_{x_i, y_i} (x_{i+1} - x_i)^3 + \ldots$$

$$= y_i + f(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2!} f'(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{1}{3!} f''(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i)^3 + \ldots$$

Widać że metoda Eulera jest metodą Rungego-Kutty pierwszego rzędu

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

Wzór dla metody Rungego-Kutty drugiego rzędu będzie wyglądał następująco:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{1}{2!} f'(x_i, y_i)h^2$$

dla metody czwartego rzędu:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{1}{2!} f^{'}(x_i, y_i)h^2 + \frac{1}{3!} f^{''}(x_i, y_i)h^3 + \frac{1}{4!} f^{'''}(x_i, y_i)h^4$$

Trzeba jakoś wyznaczyć pochodne f’ metody stopnia drugiego i f’, f’’, f’’’ dla metody stopnia czwartego

Dla metody Rungego-Kutty drugiego rzędu wzór:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{1}{2!} f'(x_i, y_i)h^2$$

można zapisać jako:

$$y_{i+1} = y_i + (c_1 K_1 + c_2 K_2)h$$

gdzie: $K_1 = f(x_i, y_i)$ $\quad K_2 = f(x_i + a_2 h, y_i + b_{21} K_1 h)$

aby wyznaczyć współczynniki c_1, c_2, a_2, b_{21} należy rozwiązać układ równań:

$$c_1 + c_2 = 1 \qquad c_2 a_2 = \frac{1}{2} \qquad c_2 b_{21} = \frac{1}{2}$$

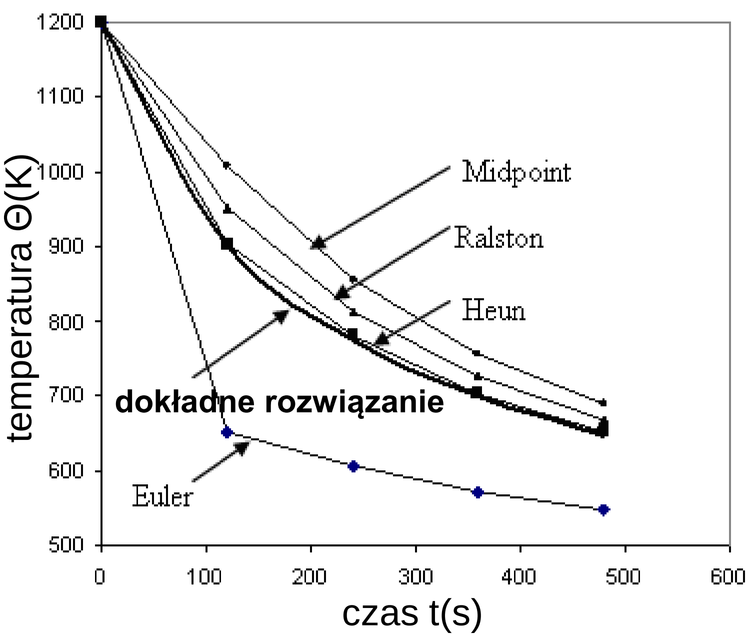
zazwyczaj wartość c_2 wybiera się aby rozwiązać pozostałe

Zazwyczaj c_2 przyjmuje jedną z trzech wartości: ½, 1, 2/3

Metoda Heun'a	Metoda midpoint	Metoda Raltson'a
$c_2 = \frac{1}{2}$	$c_2 = 1$	$c_2 = \frac{2}{3}$
$c_1 = \frac{1}{2} \quad a_2 = 1 \quad b_{21} = 1$	$c_1 = 0 \quad a_2 = \frac{1}{2} \quad b_{21} = \frac{1}{2}$	$c_1 = \frac{1}{3} \quad a_2 = \frac{3}{4} \quad b_{21} = \frac{3}{4}$
$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)h$ $k_1 = f\left(x_i, y_i\right)$ $k_2 = f\left(x_i + h, y_i + k_1 h\right)$	$y_{i+1} = y_i + k_2 h$ $k_1 = f\left(x_i, y_i\right)$ $k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$	$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2\right)h$ $k_1 = f\left(x_i, y_i\right)$ $k_2 = f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}k_1 h\right)$

Przykład (schładzana kula, …, podać temp. Po 480 sekundach)

$$\frac{d\theta}{dt} = -2.2067\times10^{-12}\left(\theta^4 - 81\times10^8\right), \qquad \theta(0) = 1200\mathrm{K}$$



Dokładna wartość rozwiązania obliczona analitycznie wynosi:

$$\theta(480) = 647.57K$$

Rozmiar kroku h	Θ(480)			
	Euler	**Heun**	**Midpoint**	**Ralston**
480	-987.84	-393.87	1208.4	449.78
240	110.32	584.27	976.87	690.01
120	546.77	651.35	690.20	667.71
60	614.97	649.91	654.85	652.25
30	632.77	648.21	649.02	648.61

Metody Rungego-Kutty czwartego rzędu

$$y_{i+1} = y_i + (c_1K_1 + c_2K_2 + c_3K_3 + c_4K_4)h$$
$$K_1 = f(x_i, y_i)$$
$$K_2 = f(x_i + a_2h, y_i + b_{21}hK_1)$$
$$K_3 = f(x_i + a_3h, y_i + b_{31}hK_1 + b_{32}hK_2)$$
$$K_4 = f(x_i + a_4h, y_i + b_{41}hK_1 + b_{42}hK_2 + b_{43}hK_3)$$

Klasyczna metoda RK IV rzędu

$$c_1 = c_4 = \frac{1}{6},\quad c_2 = c_3 = \frac{2}{6},\quad a_2 = a_3 = b_{21} = b_{32} = \frac{1}{2}$$
$$a_4 = b_{43} = 1,\quad b_{31} = b_{41} = b_{42} = 0$$

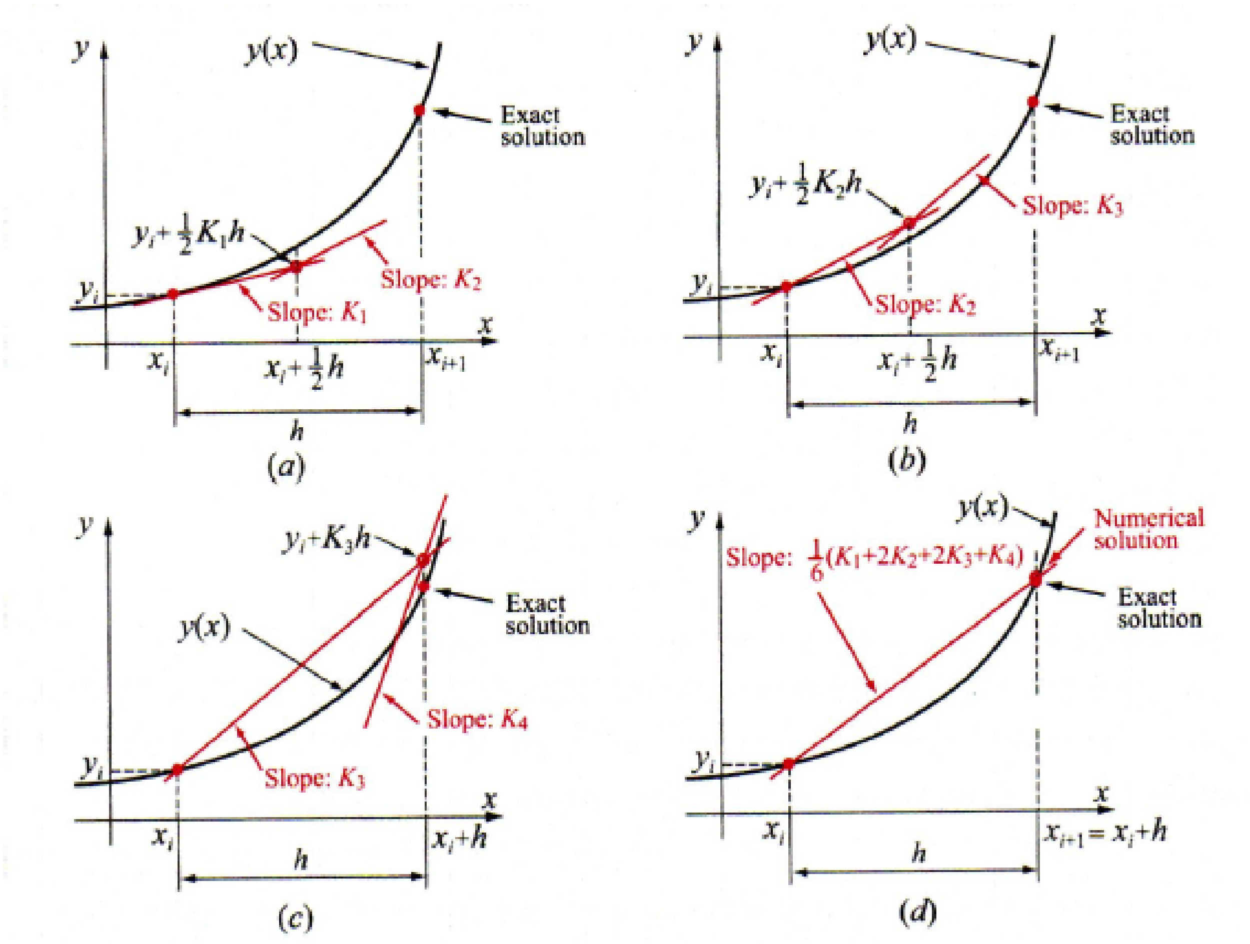
Wtedy

$$\boxed{\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)h \\ K_1 &= f(x_i, y_i) \\ K_2 &= f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}K_1h) \\ K_3 &= f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}K_2h) \\ K_4 &= f(x_i + h, y_i + K_3h) \end{aligned}}$$

Metody Rungego-Kutty

Całkowity błąd obcięcia w metodzie RK IV rzędu jest $O(h^4)$.

Równania w czerwonej ramce można wyprowadzić całkując ogólne równanie różniczkowe za pomocą metody Simpsona 1/3.



Metody Rungego-Kutty

Metodę określoną wzorem:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \sum_{i=1}^{s} w_i \mathbf{k}_i \ ,$$

gdzie:

$$\mathbf{k}_1 = h\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n),$$

$$\mathbf{k}_i = h\mathbf{f}(x_n + a_i h, \mathbf{y}_n + \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}\mathbf{k}_j), i > 1,$$

w_i, a_i, b_{ij} - stałe,

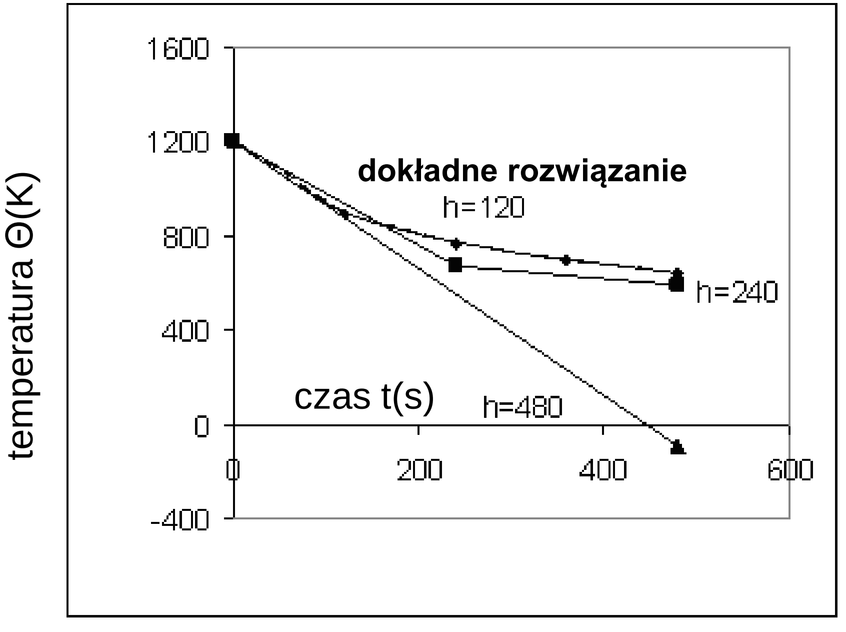
nazywamy ***metodą Rungego-Kutty***.

Tabela 7.1. Wartości współczynników w metodach typu Rungego-Kutty

Rząd metody	**Stałe w_i**	**Wartości współczynników k_i**	**Metoda**
1	$w_1=1$	$\mathbf{k}_1 = h\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n)$	***Eulera***
2	$w_1=w_2=1/2$	$\mathbf{k}_1 = h\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n)$ $\mathbf{k}_2 = h\mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_1)$	***Heuna*** (ulepszona *Eulera*)
3	$w_1=w_3=1/6$ $w_2=2/3$	$\mathbf{k}_1 = h\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n)$ $\mathbf{k}_2 = h\mathbf{f}(x_n + 0.5h, \mathbf{y}_n + 0.5\mathbf{k}_1)$ $\mathbf{k}_3 = h\mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_i - \mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2)$	pokrewna metodzie ***Simpsona***
4	$w_1=w_4=1/6$ $w_2=w_3=1/3$	$\mathbf{k}_1 = h\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n)$ $\mathbf{k}_2 = h\mathbf{f}(x_n + 0.5h, \mathbf{y}_n + 0.5\mathbf{k}_1)$ $\mathbf{k}_3 = h\mathbf{f}(x_n + 0.5h, \mathbf{y}_n + 0.5\mathbf{k}_2)$ $\mathbf{k}_4 = h\mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_3)$	klasyczna ***Rungego-Kutty***

Przykład z kulą cd

Dobór odpowiedniego kroku h jest kluczowy dla odpowiedniej dokładności rozwiązania stosując metodę Rungego - Kutty czwartego rzędu.



rozmiar kroku h	$\theta(480)$	$\|\in_t\|$ %
480	-90.278	113.94
240	594.91	8.1319
120	646.16	0.21807
60	647.54	0.0051926
30	647.57	0.00013419

Przykład

Rozwiążmy równanie

$$\frac{dy}{dx} = y - x^2$$

Dokładne rozwiązanie

$$y = 2 + 2x + x^2 - e^x$$

Warunek początkowy: $y(0) = 1$

Krok: $h = 0.1$

Pojedyczny krok:

$$K_1 = h[f(x, y)] = 0.1 f(0,1) = 0.1(1 - 0^2) = 0.1$$

$$K_2 = h\left[f\left(x + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}K_1\right)\right] = 0.1 f(0.05, 1.05) = 0.10475$$

$$K_3 = h\left[f\left(x + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}K_2\right)\right] = 0.1 f(0.05, 1. + K_2/2) = 0.104988$$

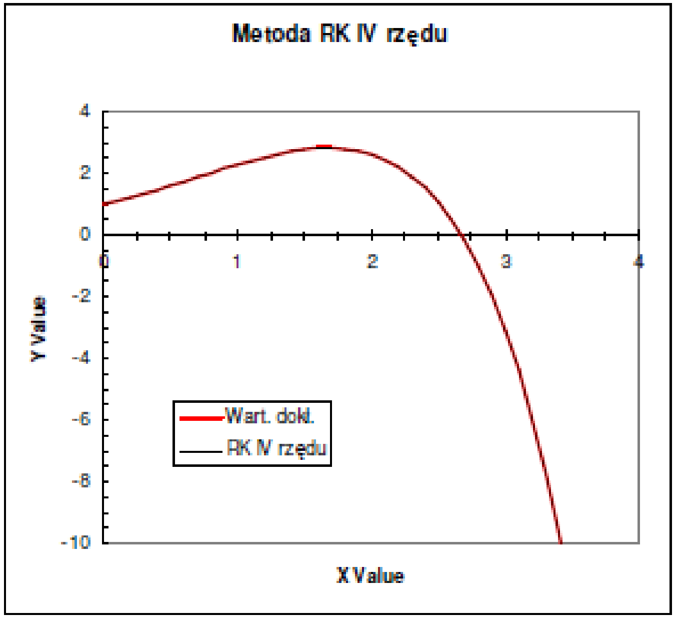
$$K_4 = h[f(x + h, y + K_3)] = 0.1 f(0.1, 1.104988) = 0.109499$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4] = 1.104829$$

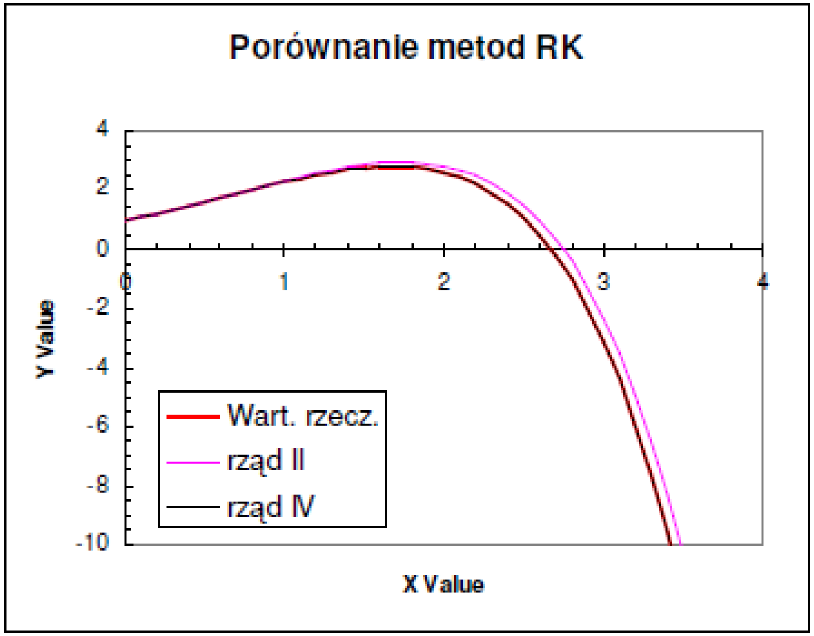
x	y	f(x,y)	K 1	K 2	K 3	K_4	Wart. rzec:
0	1	1	0.1	0.10475	0.104988	0.109499	1
0.1	1.104829	1.094829	0.109483	0.113707	0.113918	0.117875	1.104829
0.2	1.218597	1.178597	0.11786	0.121503	0.121685	0.125028	1.218597
0.3	1.340141	1.250141	0.125014	0.128015	0.128165	0.130831	1.340141
0.4	1.468175	1.308175	0.130817	0.133108	0.133223	0.13514	1.468175
0.5	1.601278	1.351278	0.135128	0.136634	0.13671	0.137799	1.601279
0.6	1.73788	1.37788	0.137788	0.138427	0.138459	0.138634	1.737881
0.7	1.876246	1.386246	0.138625	0.138306	0.13829	0.137454	1.876247
0.8	2.014458	1.374458	0.137446	0.136068	0.135999	0.134046	2.014459
0.9	2.150396	1.340396	0.13404	0.131492	0.131364	0.128176	2.150397
1	2.281717	1.281717	0.128172	0.12433	0.124138	0.119586	2.281718

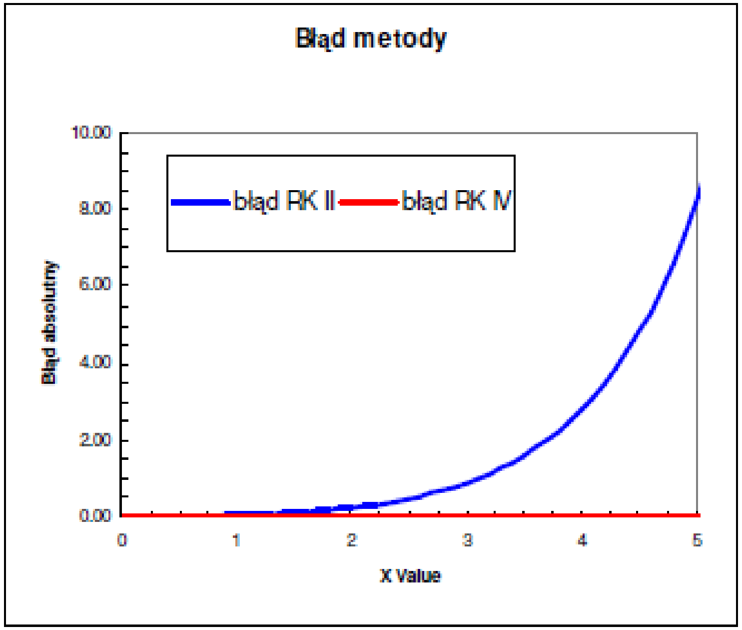
Błąd bardzo mały.

$y(5) = -111.4129$ (-111.4132)



Porównanie między metodami drugiego i czwartego rzędu pokazuje różnicę:





Układy równań różniczkowych: Szukamy funkcji

$$y_i = y_i(x), \qquad i = 1,2,\ldots,m,$$

spełniających równania

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = f_1(x, y_1, \ldots y_m) \\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = f_2(x, y_1, \ldots y_m) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\mathrm{d}y_m}{\mathrm{d}x} = f_m(x, y_1, \ldots y_m) \end{cases}$$

z warunkiem początkowym:

$$y_i(x_0) = y_{i,0}, \; i = 1,2,\ldots,m.$$

Każde z n równań może być rozwiązane z użyciem opisanych wcześniej metod rozwiązywania układów równań różniczkowych zwyczajnych stopnia pierwszego

Układy równań różniczkowych

$$\frac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad y_1(t_1) = Y_1$$

$$\frac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad y_2(t_1) = Y_2$$

$$\ldots$$

$$\frac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad y_n(t_1) = Y_n$$

Rozwiązywanie układu r. r. za pomocą metod RK

Najpierw liczymy K_1 dla wszystkich równań.

Potem liczymy K_2 dla dla wszystkich równań.

......

Gdy znamy wszystkie K, obliczamy wszystkie y_{i+1}.

Przykład: Układ trzech równań różniczkowych

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z, w)$$
$$\frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z, w)$$
$$\frac{dw}{dx} = f_3(x, y, z, w)$$

w zakresie $[a,b]$ z warunkami początkowymi $y(a) = y_1$, $z(a) = z_1$, $w(a) = w_1$.

KROK 1: Liczymy K_1

$$K_{y,1} = f_1(x_i, y_i, z_i, w_i)$$
$$K_{z,1} = f_2(x_i, y_i, z_i, w_i)$$
$$K_{w,1} = f_3(x_i, y_i, z_i, w_i)$$

KROK 2: Liczymy K_2

$$K_{y,2} = f_1(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}K_{y,1}h, z_i + \frac{1}{2}K_{z,1}h, w_i + \frac{1}{2}K_{w,1}h)$$
$$K_{z,2} = f_2(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}K_{y,1}h, z_i + \frac{1}{2}K_{z,1}h, w_i + \frac{1}{2}K_{w,1}h)$$
$$K_{w,2} = f_3(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}K_{y,1}h, z_i + \frac{1}{2}K_{z,1}h, w_i + \frac{1}{2}K_{w,1}h)$$

KROK 3: Liczymy K_3

$$K_{y,3} = f_1(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}K_{y,2}h, z_i + \frac{1}{2}K_{z,2}h, w_i + \frac{1}{2}K_{w,2}h)$$

$$K_{z,3} = f_2(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}K_{y,2}h, z_i + \frac{1}{2}K_{z,2}h, w_i + \frac{1}{2}K_{w,2}h)$$

$$K_{w,3} = f_3(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}K_{y,2}h, z_i + \frac{1}{2}K_{z,2}h, w_i + \frac{1}{2}K_{w,2}h)$$

KROK 4: Liczymy K_4

$$K_{y,4} = f_1(x_i + h, y_i + K_{y,3}h, z_i + K_{z,3}h, w_i + K_{w,3}h)$$

$$K_{z,4} = f_2(x_i + h, y_i + K_{y,3}h, z_i + K_{z,3}h, w_i + K_{w,3}h)$$

$$K_{w,4} = f_3(x_i + h, y_i + K_{y,3}h, z_i + K_{z,3}h, w_i + K_{w,3}h)$$

KROK 5: Liczymy y_{i+1}

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(K_{y,1} + 2K_{y,2} + 2K_{y,3} + K_{y,4}\right)h$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{1}{6}\left(K_{z,1} + 2K_{z,2} + 2K_{z,3} + K_{z,4}\right)h$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}\left(K_{w,1} + 2K_{w,2} + 2K_{w,3} + K_{w,4}\right)h$$

Równania różniczkowe wyższych rzędów

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{(n-1)} y}{dx^{(n-1)}} \right) \qquad dla \;\; a \le x \le b$$

Warunki początkowe:

$$y(a) = A_1, \;\; \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = A_2, \;\; \dots., \;\; \left.\frac{d^{(n-1)} y}{dx^{(n-1)}}\right|_{x=a} = A_{n-1}$$

Równanie n-tego rzędu można przekształcić w układ n równań pierwszego rzędu:

$$w_1 = \frac{dy}{dx}, \quad w_2 = \frac{dw_1}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \dots, \quad w_{n-1} = \frac{dw_{n-2}}{dx} = \frac{d^{(n-1)} y}{dx^{(n-1)}}$$

Mamy zatem układ:

$$\frac{dy}{dx} = w_1 \qquad z\, warunkiem \;\; y(a) = A_1$$

$$\frac{dw_1}{dx} = w_2 \qquad z\, warunkiem \;\; w_1(a) = A_2$$

$$\dots$$

$$\frac{dw_{n-2}}{dx} = w_{n-1} \qquad z\, warunkiem \;\; w_{n-2}(a) = A_{n-1}$$

Przykład:

Równanie różniczkowe trzeciego rzędu

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2x - 3y + 4\frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{dx^2}$$

z warunkami początkowymi:

$$y(0) = 3$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 2$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0} = 7$$

można przekształcić do postaci

$$\frac{dy}{dx} = w_1 \qquad z\,warunkiem\;\; y(0) = 3$$

$$\frac{dw_1}{dx} = w_2 \qquad z\,warunkiem\;\; w_1(0) = 2$$

$$\frac{dw_2}{dx} = 2x - 3y + 4w_1 + xw_2 \qquad z\,warunkiem\;\; w_2(0) = 7$$

$$\begin{cases} y'' + y' + y = \sin x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = u \\ u' = \sin x - y - u \end{cases}$$

hm	0,1

i	x	y	y' (czyli u)	k1	q1	k2	q2	k3	q3	k4	q4
0	0	0	0	0	0	0	0,004998	0,00025	0,004748	0,000475	0,009484
1	0,1	0,000162	0,004829	0,000483	0,009484	0,000507	0,013946	0,00118	0,013722	0,001855	0,017878
2	0,2	0,001115	0,018612	0,001861	0,017894	0,001954	0,02178	0,00295	0,021581	0,004019	0,025126
3	0,3	0,003729	0,040236	0,004024	0,025155	0,004225	0,028434	0,005445	0,02826	0,00685	0,031175
4	0,4	0,008765	0,068523	0,006852	0,031213	0,007195	0,033865	0,008545	0,033715	0,010224	0,035988
5	0,5	0,016868	0,102249	0,010225	0,036032	0,010736	0,038045	0,012127	0,037919	0,014017	0,039549
6	0,6	0,028519	0,140167	0,014017	0,039596	0,014718	0,040969	0,016065	0,040866	0,018103	0,04186
7	0,7	0,044133	0,181022	0,018102	0,041906	0,019007	0,042648	0,020235	0,042566	0,022359	0,04294
8	0,8	0,063958	0,223567	0,022357	0,042983	0,023475	0,043109	0,024512	0,043046	0,025661	0,042824
9	0,9	0,088123	0,266587	0,028659	0,042862	0,027992	0,042395	0,028778	0,042351	0,030894	0,041563
10	1	0,116638	0,308906	0,030891	0,041593	0,032435	0,040564	0,032919	0,040538	0,034944	0,039221
11	1,1	0,149396	0,349409	0,034941	0,03924	0,036688	0,037687	0,036825	0,037677	0,038709	0,035873
12	1,2	0,186175	0,387049	0,038705	0,035662	0,04064	0,033847	0,040397	0,033852	0,04209	0,031609
13	1,3	0,226653	0,420864	0,042086	0,031604	0,044191	0,029136	0,043543	0,029154	0,045002	0,026524
14	1,4	0,270412	0,449982	0,044998	0,026506	0,047248	0,023657	0,046181	0,023687	0,047367	0,020723
15	1,5	0,31696	0,473634	0,047363	0,020691	0,049732	0,017517	0,048239	0,017558	0,049119	0,014319
16	1,6	0,365687	0,491161	0,049116	0,014273	0,051572	0,010832	0,049658	0,010881	0,050204	0,007428
17	1,7	0,415984	0,502016	0,050202	0,007367	0,052712	0,00372	0,050388	0,003777	0,050579	0,000168
18	1,8	0,467147	0,505771	0,050577	9,3E-05	0,053106	-0,0037	0,050392	-0,00363	0,050214	-0,00734
19	1,9	0,518446	0,502119	0,050212	-0,00743	0,052723	-0,0113	0,049647	-0,01123	0,049089	-0,01497
20	2	0,569118	0,490876	0,049088	-0,01607	0,051642	-0,01896	0,048139	-0,01889	0,047198	-0,0226

Przykład

Rozwiąż równanie: $$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = e^{-t},\ y(0) = 1,\ \frac{dy}{dt}(0) = 2$$

oraz oblicz y(0.75)

Podstawiając: $$\frac{dy}{dt} = z$$

Po podstawieniu równanie przybiera postać:

$$\frac{dz}{dt} + 2z + y = e^{-t}$$

$$\frac{dz}{dt} = e^{-t} - 2z - y$$

Przykład c.d.

W efekcie należy rozwiązać następujący układ równań:

$$\frac{dy}{dt} = z = f_1(t,y,z), \; y(0) = 1$$

$$\frac{dz}{dt} = e^{-t} - 2z - y = f_2(t, y, z), \;\; z(0) = 2$$

Stosując metodę Eulera:

$$y_{i+1} = y_i + f_1(t_i, y_i, z_i)h$$

$$z_{i+1} = z_i + f_2(t_i, y_i, z_i)h$$

Przykład c.d.

Krok 1: $i = 0, t_0 = 0,\ y_0 = 1,\ z_0 = 2$

$y_{i+1} = y_i + f_1(t_i, y_i, z_i)h$	$z_{i+1} = z_i + f_2(t_i, y_i, z_i)h$
$y_1 = y_0 + f_1(t_0, y_0, z_0)h$ $= 1 + f_1(0{,}1{,}2)(0.25)$ $= 1 + 2(0.25)$ $= 1.5$ $y_1 = y(0.25) \approx 1.5$	$z_1 = z_0 + f_2(t_0, y_0, z_0)h$ $= 2 + f_2(0{,}1{,}2)(0.25)$ $= 2 + \left(e^{-0} - 2(2) - 1\right)(0.25)$ $= 1$ $z_1 = z(0.25) = \frac{dy}{dt}(0.25) \approx 1$

$$t = t_1 = t_0 + h = 0 + 0.25 = 0.25$$

Przykład c.d.

Krok 2: $i = 1,\ t_1 = 0.25,\ y_1 = 1.5,\ z_1 = 1$

$y_{i+1} = y_i + f_1(t_i, y_i, z_i)h$	$z_{i+1} = z_i + f_2(t_i, y_i, z_i)h$
$y_2 = y_1 + f_1(t_1, y_1, z_1)h$ $= 1.5 + f_1(0.25, 1.5, 1)(0.25)$ $= 1.5 + (1)(0.25)$ $= 1.75$ $y_2 = y(0.5) \approx 1.75$	$z_2 = z_1 + f_2(t_1, y_1, z_1)h$ $= 1 + f_2(0.25, 1.5, 1)(0.25)$ $= 1 + \left(e^{-0.25} - 2(1) - 1.5\right)(0.25)$ $= 1 + (-2.7211)(0.25)$ $= 0.31970$ $z_2 = z(0.5) \approx 0.3197$

$$t = t_2 = t_1 + h = 0.25 + 0.25 = 0.50$$

Przykład c.d.

Krok 3: $i = 2,\ t_2 = 0.5,\ y_2 = 1.75,\ z_2 = 0.31970$

$y_{i+1} = y_i + f_1(t_i, y_i, z_i)h$	$z_{i+1} = z_i + f_2(t_i, y_i, z_i)h$
$y_3 = y_2 + f_1(t_2, y_2, z_2)h$ $= 1.75 + f_1(0.50, 1.75, 0.31970)(0.25)$ $= 1.75 + (0.31970)(0.25)$ $= 1.8299$ $y_3 = y(0.75) \approx 1.8299$	$z_3 = z_2 + f_2(t_2, y_2, z_2)h$ $= 0.31972 + f_2(0.50, 1.75, 0.31970)(0.25)$ $= 0.31972 + \left(e^{-0.50} - 2(0.31970) - 1.75\right)(0.25)$ $= 0.31972 + (-1.7829)(0.25)$ $= -0.1260$ $z_3 = z(0.75) \approx -0.12601$

$$t = t_3 = t_2 + h = 0.5 + 0.25 = 0.75$$

Przykład c.d.

Otrzymane rozwiązanie to:

$$y(0.75) \approx y_3 = 1.8299$$

Wartość dokładna to:

$$y(0.75)\Big|_{exact} = 1.668$$

Błąd względny otrzymanego rozwiązania wynosi:

$$|\in_t| = \left|\frac{1.668 - 1.8299}{1.668}\right| \times 100$$

Dla RR drugiego rzędu - Metody Rungego-Kutty-Nystroma

$$y'' = f(x, y(x), y'(x)), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0$$

$$y'_{n+1} = y'_n + \frac{1}{3}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$y_{n+1} = y_n + h(y'_n + \frac{1}{3}(k_1 + k_2 + k_3))$$

$$k_1 = \frac{1}{2}hf(x_n, y_n, y'_n)$$
$$k_2 = \frac{1}{2}hf(x_n + \frac{1}{2}h,\ y_n + K,\ y'_n + k_1) \text{ gdzie } K = \frac{1}{2}h(y'_n + \frac{1}{2}k_1)$$
$$k_3 = \frac{1}{2}hf(x_n + \frac{1}{2}h,\ y_n + K,\ y'_n + k_2)$$
$$k_4 = \frac{1}{2}hf(x_n + h,\ y_n + L,\ y'_n + 2k_3) \text{ gdzie } L = \frac{1}{2}h(y'_n + k_3)$$

Zadanie domowe

Poniższe równanie opisuje drgania tłumione sprężyny.

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\dfrac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \\ x(t=0) = 1 \\ x'(t=0) = 0 \end{cases}$$

gdzie:

x – rozciągnięcie sprężyny [m]

x' – prędkość ruchu sprężyny [m/s]

β – współczynnik tłumienia = 1,8

ω_0 – częstotliwość drgań własnych [1/s] = 10

Przyjąć h=0,01, rozwiązać równanie **metodą Eulera i RK 4** wykreślić zależność **amplitudy i prędkości** od czasu.