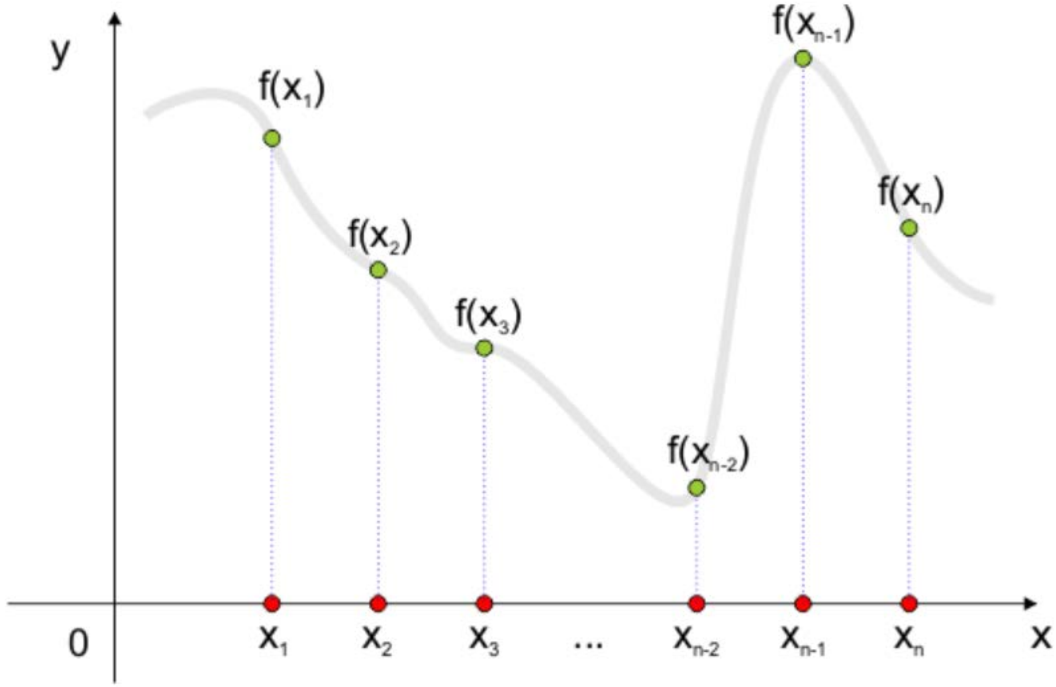
Interpolacją nazywamy postępowanie prowadzące do znalezienia wartości pewnej funkcji $f(x)$ w dowolnym punkcie przedziału (x_0, x_n) na podstawie znanych wartości tej funkcji w punktach $x_0, x_1, ..., x_n$, zwanych ***węzłami interpolacji*** $(x_0 < x_1 < ... < x_n)$



Postępowanie prowadzące do znalezienia wartości funkcji $f(x)$ w punkcie leżącym poza przedziałem (x_0, x_n) nazywamy ***ekstrapolacją***.

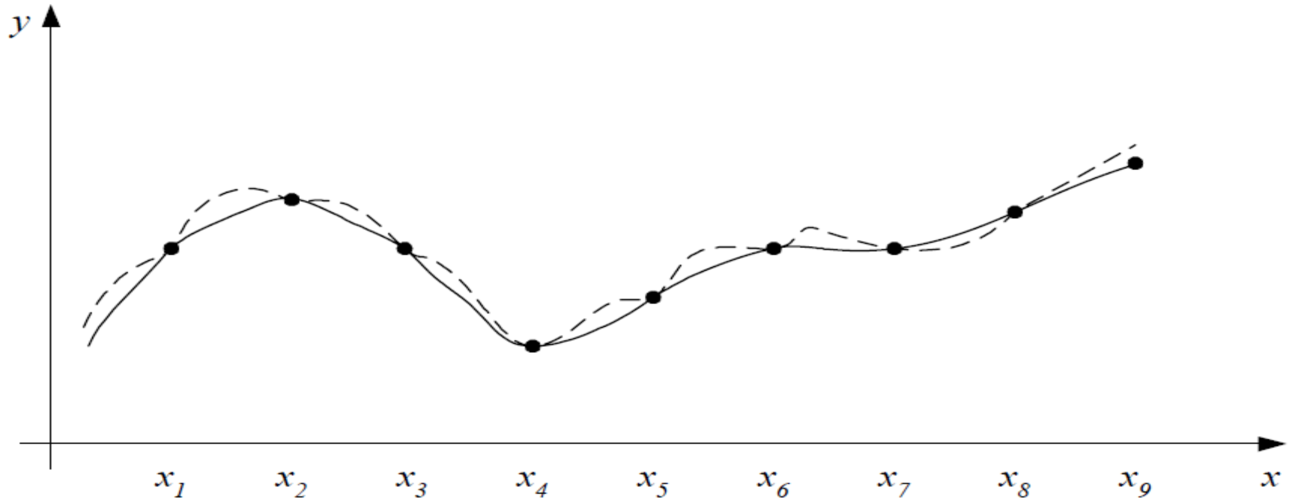
Interpolację lub ekstrapolację stosujemy najczęściej w następujących przypadkach:

- gdy nie znamy samej funkcji $f(x)$, a tylko jej wartości w pewnych punktach (obliczenia dyskretne, eksperyment);
- gdy obliczanie wartości pewnej funkcji $F(x)$ bezpośrednio z określającego ją wzoru nastręcza zbyt duże trudności rachunkowe; wtedy zastępujemy ją prostszą funkcją $f(x)$, o której zakładamy, że w punktach $x_0, x_1, ..., x_n$ ma te same wartości co funkcja $F(x)$; w tym przypadku $F(x)$ nazywamy ***funkcją interpolowaną***, zaś $f(x)$ ***funkcją interpolującą***

Zadaniem interpolacji jest wyznaczenie przybliżonych wartości funkcji dla wartości zmiennych niezależnych z przedziału (x_0, x_n), lecz nie będących punktami ze zbioru $x_0, x_1, ..., x_n$.

Jest to bardzo ogólne sformułowanie zadania

- istnieje nieskończenie wiele sposobów jego rozwiązania, jeśli nie jest zadany sposób przeprowadzenia funkcji interpolacyjnej przez zadane punkty



Funkcji interpolującej poszukuje się zwykle w pewnej określonej postaci. Najczęściej zakłada się, że jest to wielomian lub funkcja wymierna.

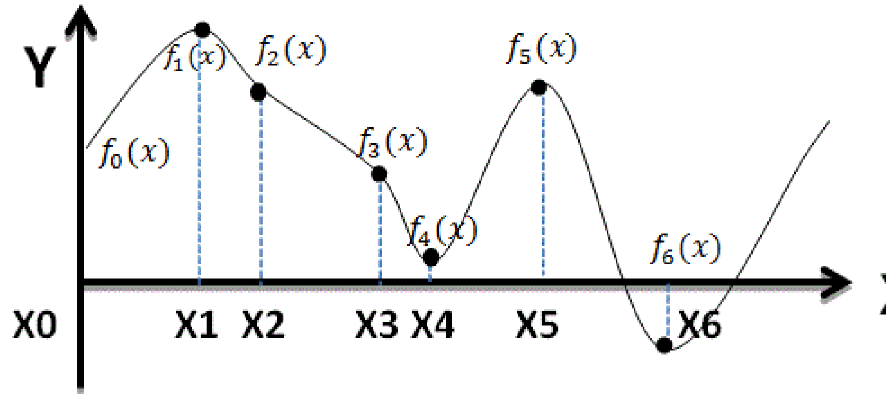
- **Interpolacja wielomianowa**
- Interpolacja trygonometryczna
- Interpolacja wymierna
- Interpolacja funkcjami sklejanymi (spline)
- Interpolacja Hermite'a: interpolacja wielomianowa, w której oprócz zadanych wartości funkcji w węzłach są zadane wartości pochodnych do rzędu m włącznie ($m>0$).

Metoda interpolacji wielomianowej polega na wybraniu n+1 węzłów spośród analizowanych punktów i znalezieniu wielomianu W(x) co najwyżej n-tego stopnia, przyjmującego wartości zadane w węzłach.

Znajdowanie odpowiedniego wielomianu

Wielomian przyjmujący zadane wartości w konkretnych punktach można znaleźć w następujący sposób:

- dla pierwszego węzła o wartości $f(x_0)$ znajduje się wielomian, który w punkcie x_0 przyjmuje wartość $f(x_0)$, a w pozostałych węzłach wartość zero.
- dla każdego kolejnego węzła o wartości $f(x_i)$ znajduje się podobny wielomian, który w punkcie x_i przyjmuje wartość $f(x_i)$, natomiast we wszystkich pozostałych węzłach wartość zero.
- następnie należy zsumować wszystkie wielomiany, gdyż wielomian będący sumą wielomianów obliczonych dla poszczególnych węzłów jest wielomianem interpolującym .



Dana jest funkcja
$y = f(x),\ x \in [x_0, x_n]$.
Znamy tablice wartości
tej funkcji, czyli:

$$
\begin{aligned}
f(x_0) &= y_0 \\
f(x_1) &= y_1 \\
&\vdots \\
f(x_i) &= y_i \\
&\vdots \\
f(x_n) &= y_n
\end{aligned}
$$

Wyznaczamy funkcję $W(x)$
spełniającą warunki:

$$
\begin{aligned}
W(x_0) &= y_0 \\
W(x_1) &= y_1 \\
&\vdots \\
W(x_i) &= y_i \\
&\vdots \\
W(x_n) &= y_n
\end{aligned}
$$

Wielomianem interpolacyjnym $\boldsymbol{W_n(x)}$ nazywamy wielomian stopnia co najwyżej $\boldsymbol{n}$, który w punktach $x_0, x_1, ..., x_n$ spełnia warunki interpolacji:

$$\boldsymbol{W_n(x_i)=y_i} \text{ dla } \boldsymbol{i}=0,1,2,\dots,\boldsymbol{n}.$$

Twierdzenie

Istnieje dokładnie jeden wielomian interpolacyjny, który w punktach x_0, $x_1, ..., x_n$ przy założeniu, że $x_i \neq x_j \; dla \; i \neq j$ spełnia powyższe warunki interpolacji

Węzły interpolacji x_0, x_1, ..., x_n mogą być rozmieszczone w zupełnie dowolny sposób

Szukany wielomian można zapisać w postaci:

$$W_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$$

Postać wielomianu interpolacyjnego:

- Wielomian interpolacyjny Lagrange'a
- Wielomian interpolacyjny Newtona

Korzystając z definicji wielomianu interpolacyjnego otrzymujemy układ n+1 równań z n+1 niewiadomymi współczynnikami a_0, a_1, ..., a_n

$$W_n(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

$$a_o + a_1 x_o + a_2 x_o^2 + \ldots + a_n x_o^n = y_o$$

$$a_o + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = y_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_o + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = y_n$$

Układ Cramera

$$a_k = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & x_o & x_o^2 & \dots & x_o^{k-1} & \boxed{y_o} & \dots & x_o^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{k-1} & y_1 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{k-1} & x_{k-1}^2 & \dots & x_{k-1}^{k-1} & y_{k-1} & \dots & x_{k-1}^n \\ 1 & x_k & x_k^2 & \dots & x_k^{k-1} & y_k & \dots & x_k^n \\ 1 & x_{k+1} & x_{k+1}^2 & \dots & x_{k+1}^{k-1} & y_{k+1} & \dots & x_{k+1}^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{k-1} & y_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & x_o & \dots & x_o^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ .. & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}}$$

Macierz współczynników powyższego układu równań na współczynniki a_i jest ***macierzą Vandermonde'a ,*** której wyznacznik

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} .$$

$$D = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j) \neq 0$$ założeniach, że $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$.

Rozwiązanie można zapisać też w następującej postaci

$$a_i = \frac{1}{D}\sum_{j=0}^{n} y_j D_{ij} \ ,$$

Gdzie D_{ij} jest dopełnieniem algebraicznym elementu ij macierzy współczynników

Wielomian interpolacyjny Lagrange'a ma następującą postać:

$$W_n(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} + \\ + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdot\ldots\cdot(x_1-x_n)} + \ldots + \\ + y_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})} = \boxed{\sum_{j=0}^{n} y_j \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} \frac{(x-x_k)}{(x_j-x_k)}}.$$

Wielomian ten jest wielomianem stopnia co najwyżej *n* i jest jednoznacznym rozwiązaniem zadania interpolacyjnego dla dowolnego wyboru *n*+1 różnych węzłów interpolacji

Przykład

Znaleźć wielomian interpolacyjny Lagrange'a, który w punktach:

-2, -1, 0, 2 przyjmuje odpowiednio wartości 0, 1, 1, 2. Obliczyć także przybliżoną wartość funkcji danej powyższymi wartościami w punkcie *x=1*. (**n =3**)

$$W_3(x) = 0\frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(-2+1)(-2-0)(-2-2)} + 1\frac{(x+2)(x-0)(x-2)}{(-1+2)(-1-0)(-1-2)} +$$

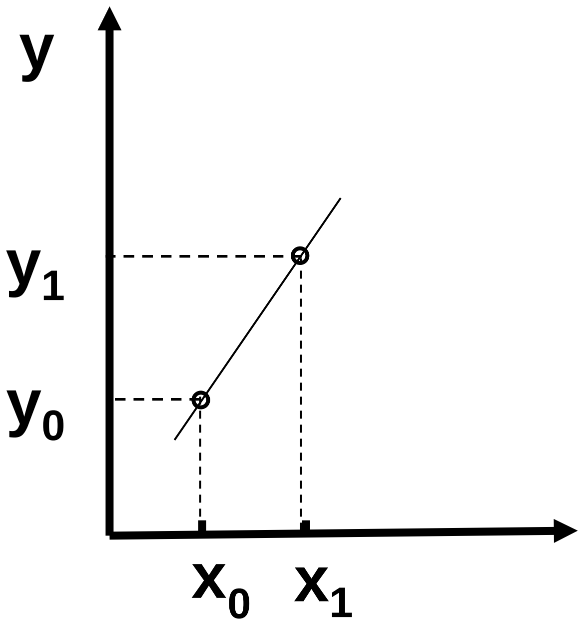
$$+1\frac{(x+2)(x+1)(x-2)}{(0+2)(0+1)(0-2)} + 2\frac{(x+2)(x+1)(x-0)}{(2+2)(2+1)(2-0)} =$$

$$= \frac{1}{3}(x^3-4x) - \frac{1}{4}(x^3+x^2-4x-4) + \frac{1}{12}(x^3+3x^2+2x) =$$

$$= \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x + 1.$$

$$f(1) \cong W_3(1) = \frac{1}{6}\cdot 1^3 - \frac{1}{6}\cdot 1 + 1 = 1$$

Przykład: Interpolacja liniowa – wzór prostej przechodzącej przez 2 punkty (węzły) (n=1)



$$W_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 =$$

$$\frac{-xy_0 + x_1 y_0 + xy_1 - x_0 y_1}{x_1 - x_0} =$$

$$\frac{(y_1 - y_0)x + x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0} =$$

$$\frac{(y_1 - y_0)(x - x_0) + (x_1 - x_0) y_0}{x_1 - x_0} =$$

$$y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Wzór interpolacyjny Lagrange'a jest niewygodny do stosowania w przypadku, gdy zmienia się liczba węzłów. Wtedy do wyznaczenia wielomianu określonego stopnia trzeba powtarzać obliczenia od początku. Zatem poprzez dodanie nowych węzłów interpolacyjnych nie można modyfikować wcześniej wyznaczonego wielomianu Lagrange'a

Modyfikacja- wzór interpolacyjny Newtona

Definiujemy wyrażenia zwane ***ilorazami różnicowymi***

- pierwszego rzędu:

$$[x_0, x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

$$[x_1, x_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

. . . .

$$[x_{n-1}, x_n] = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}},$$

- drugiego rzędu (analogicznie):

$$[x_0, x_1, x_2] = \frac{[x_1, x_2] - [x_0, x_1]}{x_2 - x_0},$$

$$[x_1, x_2, x_3] = \frac{[x_2, x_3] - [x_1, x_2]}{\mathrm{x}_3 - \mathrm{x}_1},$$

. . . .

$$[x_{n\text{-}2}, x_{n\text{-}1}, x_n] = \frac{[x_{n\text{-}1}, x_n] - [x_{n\text{-}2}, x_{n\text{-}1}]}{x_n - x_{n\text{-}2}},$$

- ***k***-tego rzędu:

$$[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+\mathrm{k}}] - [x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k\text{-}1}]}{x_{i+k} - x_i} \quad \text{dla } \boldsymbol{k} = 1,\ 2,\ \ldots$$

oraz ***i*** = 0, 1, 2, ...

Z ilorazów różnicowych można utworzyć tabelkę

x_i	y_i	rzędu 1	rzędu 2	rzędu 3	rzędu 4	rzędu 5
x_0	y_0					
		$[x_0,x_1]$				
x_1	y_1		$[x_0,x_1,x_2]$			
		$[x_1,x_2]$		$[x_0,x_1,x_2,x_3]$		
x_2	y_2		$[x_1,x_2,x_3]$		$[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]$	
		$[x_2,x_3]$		$[x_1,x_2,x_3,x_4]$		. . .
x_3	y_3		$[x_2,x_3,x_4]$		$[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]$	
		$[x_3,x_4]$		$[x_2,x_3,x_4,x_5]$		
x_4	y_4		$[x_3,x_4,x_5]$			
		$[x_4,x_5]$				
x_5	y_5					

wzór interpolacyjny Newtona z ilorazami różnicowymi

$$
\begin{aligned}
y = W_n(x) &= y_0 + [x_0, x_1](x - x_0) \\
&+ [x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots \\
&+ [x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1}).
\end{aligned}
$$

$$
y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)
$$

Dane są wartości funkcji: $f(0)=0$, $f(2)=8$, $f(3)=27$, $f(5)=125$, $f(6)=216$.

Tablica ilorazów różnicowych będzie następująca:

x_i	$f(x_i)$	Ilorazy różnicowe			
		Rzędu 1	Rzędu 2	Rzędu 3	Rzędu 4
$x_0=0$	$f(x_0)=0$				
		$f(x_0;x_1)=\frac{8-0}{2-0}=4$			
$x_1=2$	$f(x_1)=8$		$f(x_0;x_1;x_2)=\frac{19-4}{3-0}=5$		
		$f(x_1;x_2)=\frac{27-8}{3-2}=19$		$f(x_0;x_1;x_2;x_3)=\frac{10-5}{5-0}=1$	
$x_2=3$	$f(x_2)=27$		$f(x_1;x_2;x_3)=\frac{49-19}{5-2}=10$		$f(x_0;x_1;x_2;x_3;x_4)=\frac{1-1}{6-0}=0$
		$f(x_2;x_3)=\frac{125-27}{5-3}=49$		$f(x_1;x_2;x_3;x_4)=\frac{14-10}{6-2}=1$	
$x_3=5$	$f(x_3)=125$		$f(x_2;x_3;x_4)=\frac{91-49}{6-3}=14$		
		$f(x_3;x_4)=\frac{216-125}{6-5}=91$			
$x_4=6$	$f(x_4)=216$				

Przykład

Znaleźć wielomian interpolacyjny Newtona, który w punktach: -2, -1, 0, 2, 4 przyjmuje odpowiednio wartości -1, 0, 5, 99, -55.

x_i	y_i	**rzędu 1**	**rzędu 2**	**rzędu 3**	**rzędu 4**
-2	-1				
		1			
-1	0		2		
		5		3	
0	5		14		-2
		47		-9	
2	99		-31		
		-77			
4	-55				

Dla ***n=4*** wielomian interpolacyjny Newtona ma postać

$$W_4(x) = y_0 + [x_0, x_1] \cdot (x - x_0) + [x_0, x_1, x_2] \cdot (x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+[x_0, x_1, x_2, x_3] \cdot (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) +$$
$$+[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

A zatem otrzymujemy wielomian o współczynnikach:

$$W_4(x) = -1 + 1(x + 2) + 2(x + 2)(x + 1) + 3(x + 2)(x + 1) +$$
$$-2(x + 2)(x + 1)x(x - 2) = -1 + x + 2 + 2(x^2 + 3x + 2) +$$
$$+3(x^3 + 3x^2 + 2x) - 2(x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x) = -2x^4 + x^3 +$$
$$+19x^2 + 21x + 5$$

Interpolację trygonometryczną stosuje się do wyznaczania funkcji okresowych, często sinusoidalnych, np. funkcji opisujących sygnały elektryczne lub drgania w mechanice.

rozpatrujemy tylko funkcje o okresie 2π. (nie zmniejsza to ogólności zadania)

$$f(x+2\pi)=f(x)$$

Zadanie interpolacji trygonometrycznej polega na znalezieniu, dla danej funkcji f, wielomianu trygonometrycznego postaci:

$$F_n(x) = \sum_{m=0}^{n} c_m e^{jmx} = \sum_{m=0}^{n} c_m (\cos(mx) + j\sin(mx)),$$

gdzie $j = \sqrt{-1}$. Wielomian ten w n+1 różnych punktach x_k, k=0, 1, ..., n, $x_k \neq x_l$ dla $k \neq l$, z przedziału $(0,2\pi)$ przyjmuje te same wartości, co funkcja f. Tzn. dla k=0,1,...,n:

$$F_n(x_k) = f(x_k) .$$

Potrzeba wyznaczania współczynników wielomianu interpolacyjnego funkcji *f* opartego na dowolnych węzłach pojawia się w praktyce bardzo rzadko. Z tego powodu ograniczymy się tylko do przypadku węzłów równoodległych (uproszczenie zagadnienia)

$$x_k = \frac{2k\pi}{n+1}, \; k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n \qquad **$$

Trygonometryczny wielomian interpolacyjny funkcji *f*, oparty na węzłach ** może być przedstawiony w następującej postaci:

$$F_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{p}(a_m \cos mx + b_m \sin mx) + \frac{1}{2}\delta a_{p+1}\cos(p+1)x \qquad ****$$

przy czym:

dla n parzystego $\delta=0$, $p=0.5n$;

dla n nieparzystego $\delta=1$, $p=0.5(n-1)$,

współczynniki a_m oraz b_m mają postać:

$$a_m = \frac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\cos mx_k, \quad m = 0,1,2,\ldots,p,$$

$$b_m = \frac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\sin mx_k, \quad m = 1,2,\ldots,p.$$

Interpolacja trygonometryczna

Znaleźć trygonometryczny wielomian interpolacyjny $F_4(x)$ przechodzący przez węzły interpolacji ** i dla $n = 4$ przybliżający funkcję daną w postaci dyskretnych wartości $f_0 = f_1 = f_2 = 0$, $f_3 = f_4 = 1$.

Zgodnie ze wzorem **** dla p=0.5, $n = 2$ mamy:

$$F_4(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{m=1}^{2} (a_m \cos mx + b_m \sin mx) =$$

$$= 0.5a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x.$$

Wyznaczamy węzły interpolacji:

$x_0 = 0$, $x_1 = 2/5\pi$, $x_2 = 4/5\pi$, $x_3 = 6/5\pi$, $x_4 = 8/5\pi$,

zaś ze wzorów (3.18) otrzymujemy:

$$a_m = \frac{2}{5}\sum_{k=0}^{4} f(x_k)\cos mx_k, m = 0,1,2,$$

$$b_m = \frac{2}{5}\sum_{k=0}^{4} f(x_k)\sin mx_k, m = 1,2.$$

Zatem:

$$a_0 = \frac{2}{5}\sum_{k=0}^{4} f(x_k) = \frac{2}{5}(1+1) = \frac{4}{5} = 0.8,$$

$$a_1 = \frac{2}{5}\sum_{k=0}^{4} f(x_k)\cos x_k = \frac{2}{5}(-0.809 + 0.309) = -0.200,$$

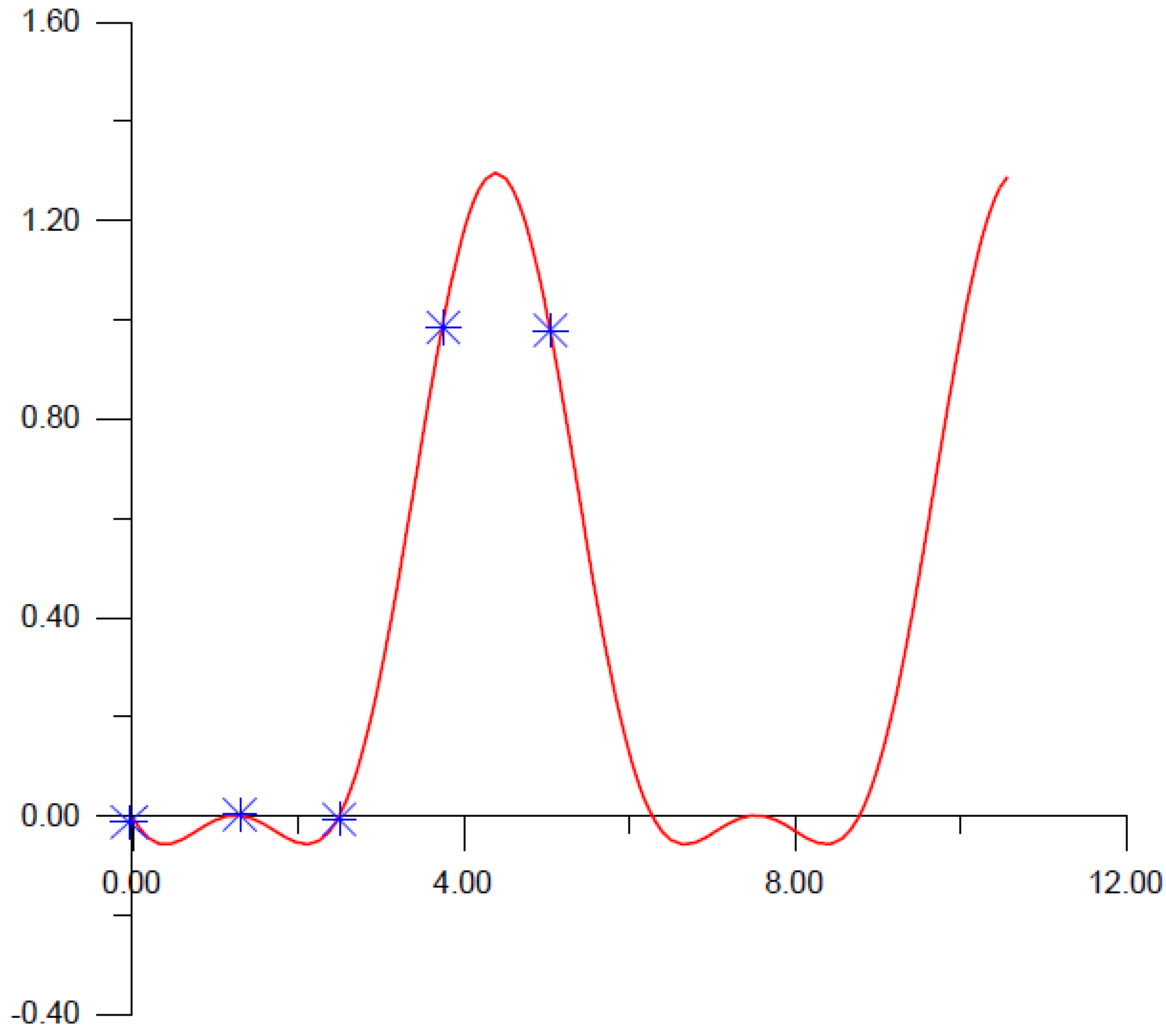
$$a_2 = \frac{2}{5}\sum_{k=0}^{4} f(x_k)\cos 2x_k = \frac{2}{5}(0.309 - 0.809) = -0.200,$$

$$b_1 = \frac{2}{5}\sum_{k=0}^{4} f(x_k)\sin x_k = \frac{2}{5}(-0.558 - 0.951) = -0.616,$$

$$b_2 = \frac{2}{5}\sum_{k=0}^{4} f(x_k)\sin 2x_k = \frac{2}{5}(0.951 - 0.588) = 0.145.$$

Ostatecznie:

$F_4(x) = 0.8 - 0.2 \cos x - 0.616 \sin x - 0.2 \cos 2x + 0.145 \sin 2x.$



1.60
1.20
0.80
0.40
0.00
-0.40
0.00
4.00
8.00
12.00