

Całka oznaczona funkcji $f(x)$ w przedziale (a,b)

$$\int_a^b f(x)dx$$

Całka nieoznaczona funkcji $f(x)$

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Z własność całek oznaczonych mamy:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Szerokie zastosowanie w fizyce, chemii, matematyce, inżynierii,

Np. Standardowa funkcja rozkładu – statystyka:

$$N_{0,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$$

Lub liczenie długości krzywej:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

...

Całkowanie symboliczne i liczenie wartości wprost z definicji czy własności i twierdzeń rachunku całkowego często jest nierealne

- trudność wyznaczenia funkcji pierwotnej
- brak możliwości wyznaczenia funkcji pierwotnej (np. nie znamy samej funkcji $f(x)$)
- wyznaczanie całek za pomocą dyskretyzacji

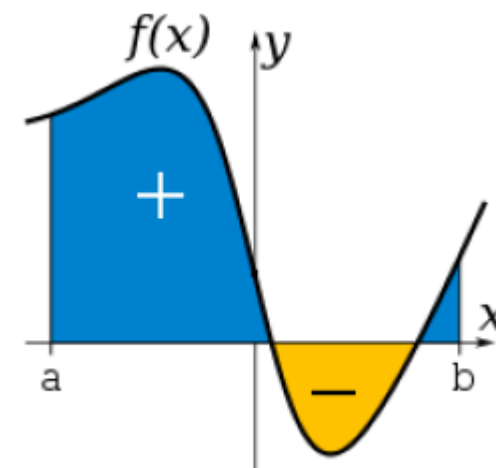
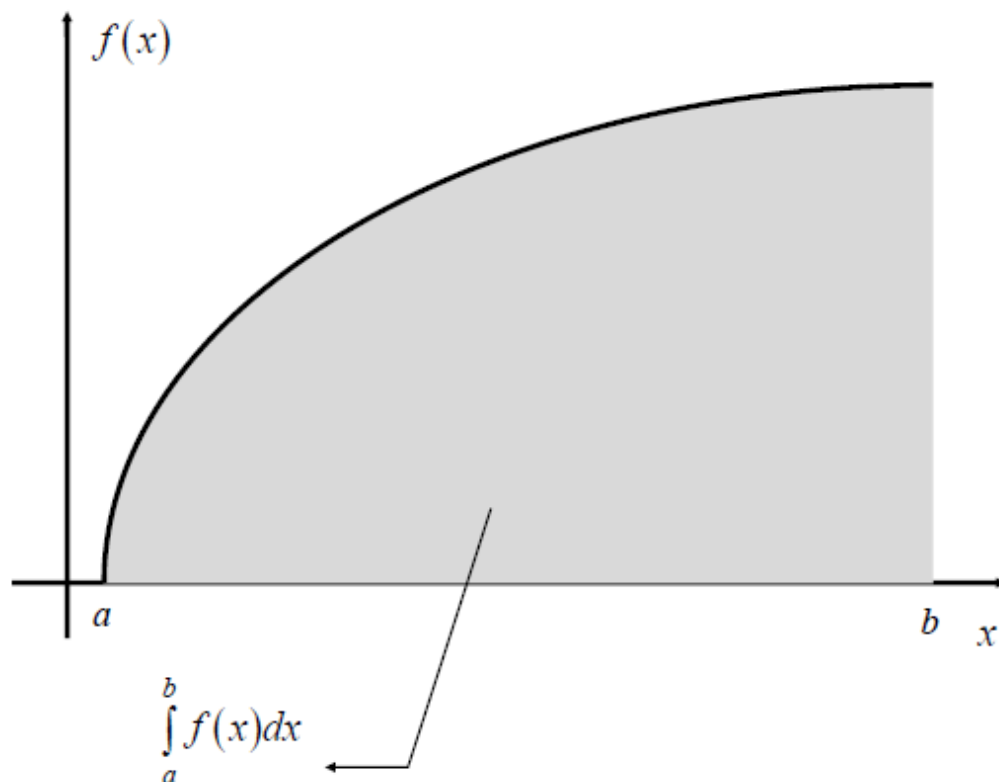
Definicja Riemana całki oznaczonej:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b-a}{N} \sum_{k=1}^N f(x_k),$$

Gdzie $x_k, k = 1, 2, \dots, N$ wybrane punkty:

$$x_k \in \left[a + \frac{k-1}{N} (b-a), a + \frac{k}{N} (b-a) \right]$$

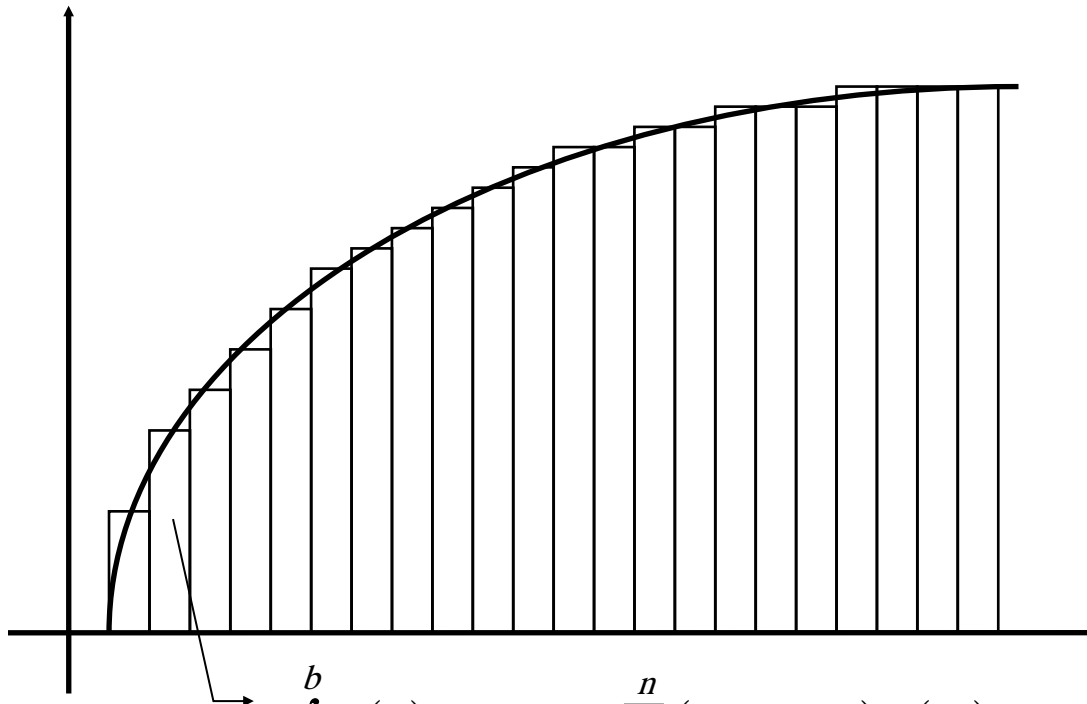
Interpretacja geometryczna całki oznaczonej:



W najprostszym przybliżeniu obliczanie numeryczne całek prowadzi się do jak najdokładniejszego (zależnego od kształtu funkcji) obliczenia pola powierzchni .

Jeden ze sposobów:

Naturalne przybliżenie wykonywane w celu obliczenia całki – przybliżenie pola powierzchni prostokątami – łatwość obliczenia takiego pola powierzchni.



$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) f(\tilde{x}_i) \quad \tilde{x}_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

Założmy, że P_N jest wielomianem interpolacyjnym mającym punkty wspólne z funkcją $f(x)$

Wtedy całkę oznaczoną można przybliżyć za pomocą całek z wielomianów, które znacznie łatwiej można obliczać

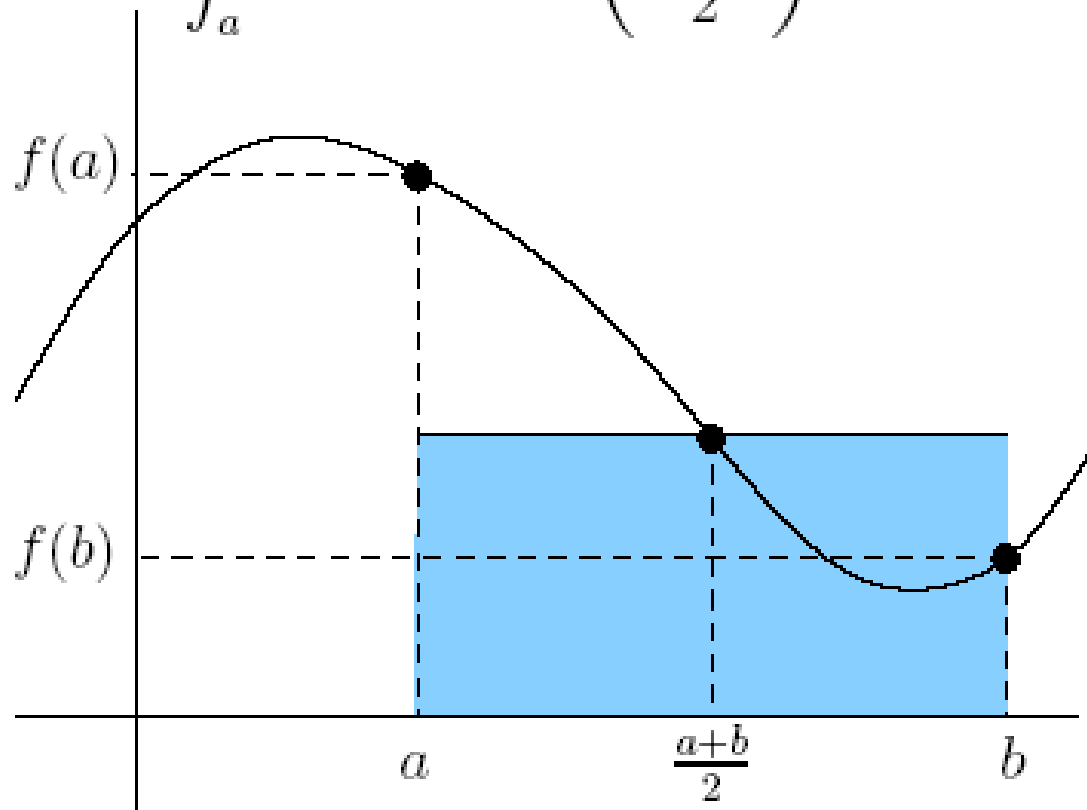
$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P_N(x) dx.$$

Są to oczywiście wzory przybliżone

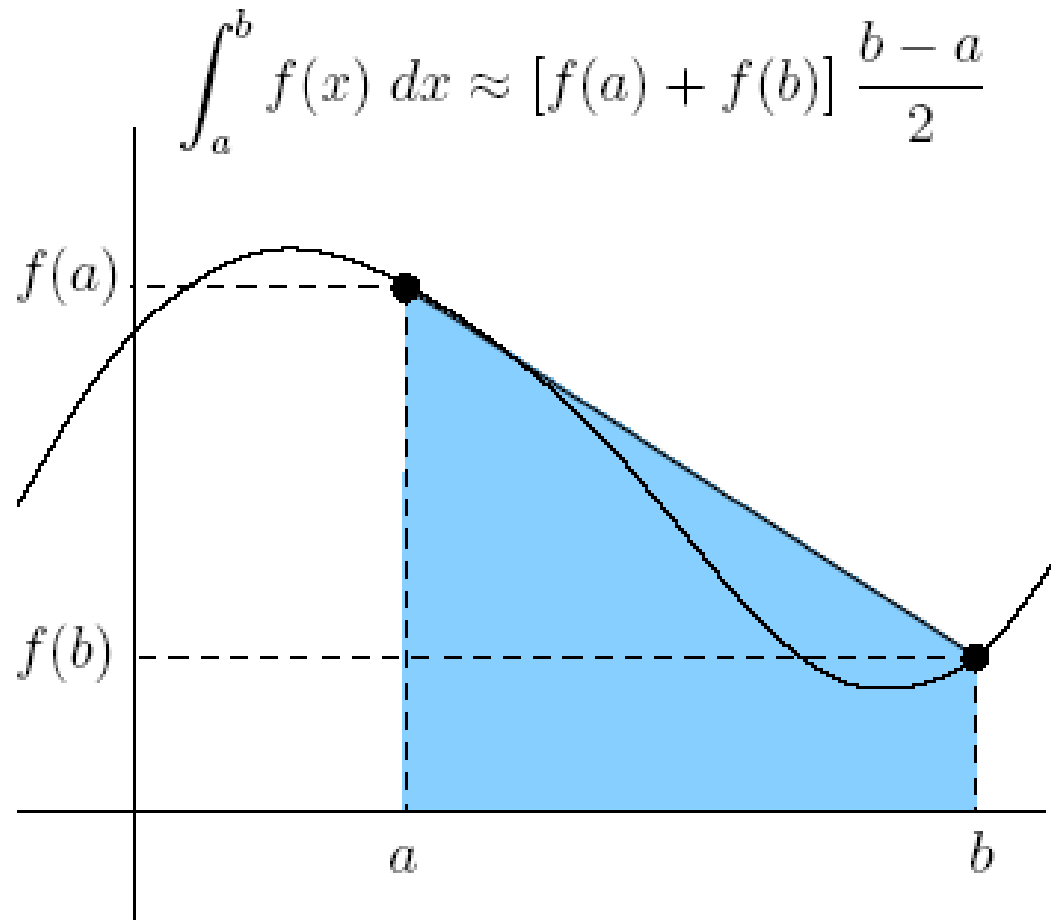
Stosowane najczęściej przybliżenia: („grube” przybliżenia – wzory proste)

Metoda kwadratów (punktu środkowego – midpoint method)

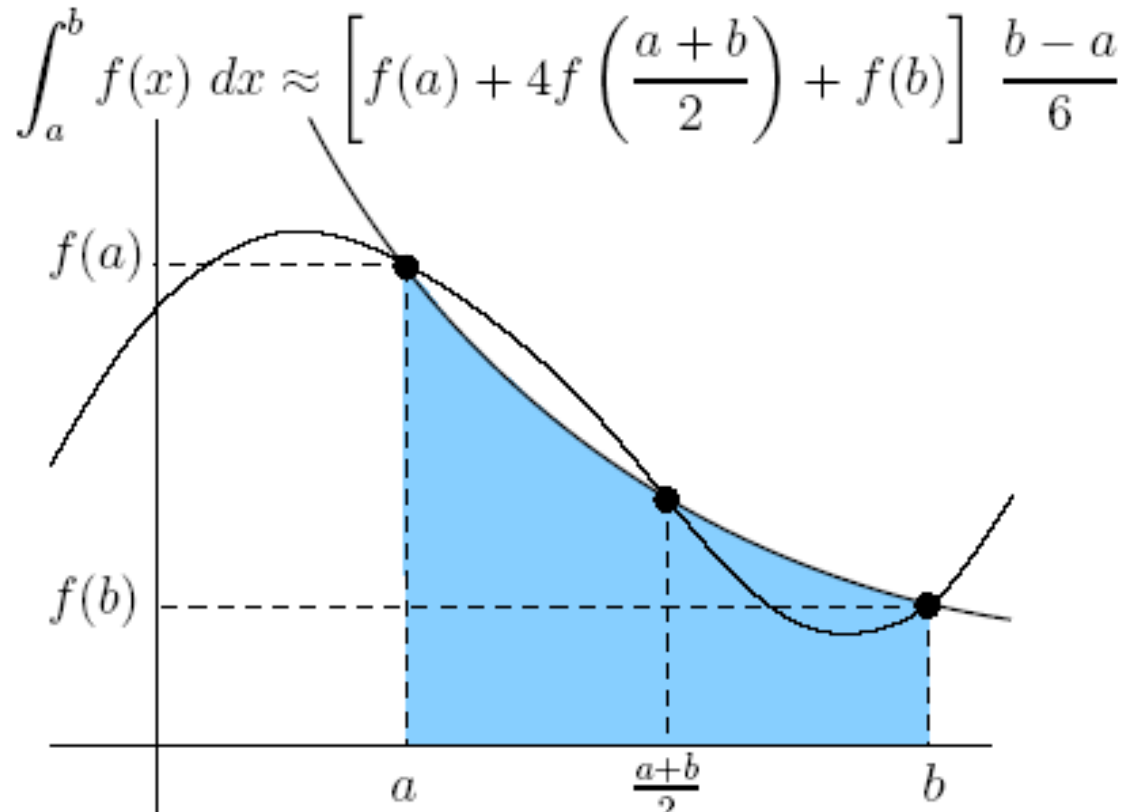
$$\int_a^b f(x) dx \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right) (b-a)$$



Metoda trapezów – staramy się lepiej dopasować do kształtu krzywej



Metoda i wzór **prosty** Simpsona (przybliżamy funkcję podcałkową w przedziale za pomocą paraboli)



Analiza błędów w/w metod

Midpoint method:

$$\text{Error} \leq \frac{(b-a)h^2}{24} \max_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)|, \quad h = b - a$$

Trapezoid method:

$$\text{Error} \leq \frac{(b-a)h^2}{12} \max_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)|, \quad h = b - a$$

Simpson's method:

$$\text{Error} \leq \frac{(b-a)h^4}{180} \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(4)}(\xi)|, \quad h = \frac{b-a}{2}$$

przykład:

$$\int_0^2 f(x) dx$$

$f(x)$	Exact	Midpoint	Trapezoid	Simpson
x^2	2.667	2.000	4.000	2.667
x^4	6.400	2.000	16.000	6.667
$(x + 1)^{-1}$	1.099	1.000	1.333	1.111
$\sqrt{1 + x^2}$	2.958	2.828	3.326	2.964
$\sin x$	1.416	1.683	0.909	1.425
e^x	6.389	5.437	8.389	6.421

Wzory proste dają bardzo małą dokładność

Aby poprawić jakość powyższych metod skorzystamy z podstawowej własności całek:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Gdzie $c \in (a, b)$

Pozwoli nam to podzielić przedział całkowania na mniejsze przedziały

Możemy więc tworzyć tzw. wzory złożone, korzystając z poznanych przybliżonych wzorów prostych.

Np. Metoda trapezów zastosowana do przedziału podzielonego np. na **2** przedziały

$$h = \frac{b - a}{2}.$$

Prowadzi do

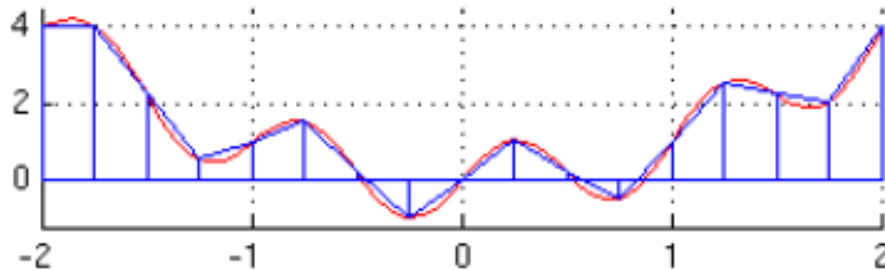
$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx [f(a) + f(a + h)] \frac{h}{2} + [f(a + h) + f(b)] \frac{h}{2} \\ &= [f(a) + 2f(a + h) + f(b)] \frac{h}{2}, \end{aligned}$$

W ogólności dla podziału na N przedziałów:

$$h = \frac{b - a}{N}$$

Otrzymujemy złożony wzór trapezów:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \left[f(a) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} f(a + kh) + f(b) \right] \frac{h}{2}$$

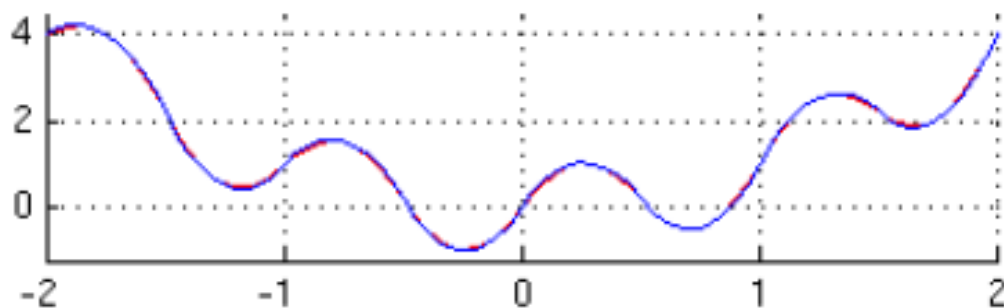


$$\frac{f''(\xi) (b - a)^3}{12 N^2}$$

Podobnie **złożony wzór Simsona** (N- nieparzyste) (dzielimy na N-1 przedziałów

$$h=(b-a)/(N-1)$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + 2f(a+4h) + \dots + f(b)]$$



Wyprowadzone wzory, zarówno proste jak i złożone są przypadkami szczególnymi kwadratur całkowych.

W ogólności numerycznie całkujemy za pomocą tzw. kwadratur:

Kwadraturą nazywamy przybliżenie funkcjonału $I(f) = \int f(x) dx$

funkcjonałem $Q(f)$ postaci

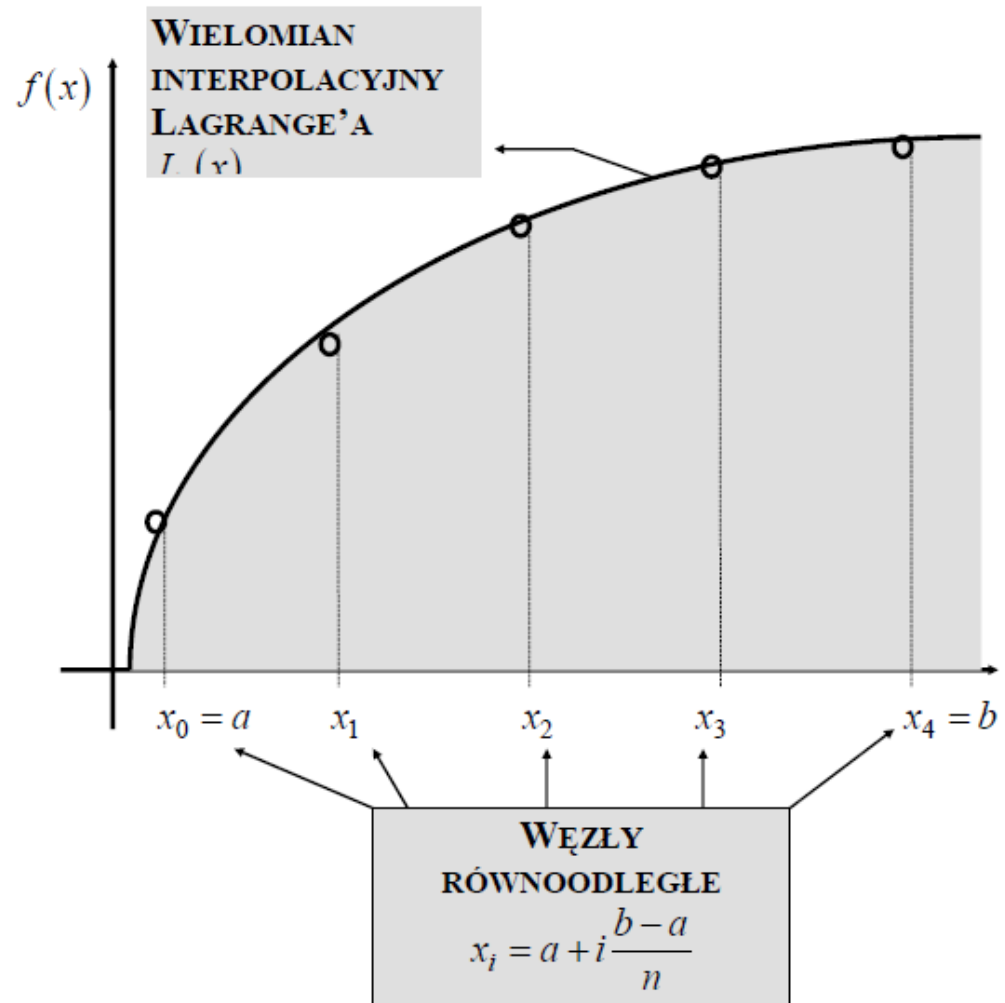
$$Q(f) = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

Gdzie A_i współczynniki kwadratury

x_i węzły kwadratury

Kwadratury Newtona-Cotesa

$$Q(f) = I(L_n)$$



Gdzie współczynniki kwadratur Newtona-Cotesa

$$Q(f) = I(L_n) = \int_a^b L_n(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{i=0}^n f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) dx$$

$$x_i = a + ih, \quad x = a + th \left(x \in [a, b] \Rightarrow t \in [0, n] \right); \quad dx = h dt, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

$$Q(f) = h \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_0^n \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{a + th - a - jh}{a + ih - a - jh} \right) dt = h \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_0^n \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - j}{i - j} \right) dt$$

Stąd
$$Q(f) = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

gdzie
$$A_i = h \underbrace{\int_0^n \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - j}{i - j} \right) dt}_{B_i}$$

Przykłady kwadratur Newtona-Cotesa

$n=1$: formuła trapezów

$a=x_0$, $b=x_1$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx \frac{h}{2} (f_0 + f_1)$$

$n=2$: wzór Simpsona

$a=x_0$, $b=x_2$, $x_1=(a+b)/2$, $h=(b-a)/2$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2)$$

$$n = 2$$

$$x_0 = a; \quad x_1 = \frac{a+b}{2}; \quad x_2 = b;$$

$$A_0 = A_2 = \frac{b-a}{2} \int_0^2 \frac{(t-1)(t-2)}{(0-1)(0-2)} dt = \frac{b-a}{4} \int_0^2 (t^2 - 3t + 2) dt =$$

$$= \frac{b-a}{4} \left(\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 2t \right) \Big|_0^2 = \frac{b-a}{6}$$

$$A_1 = \frac{b-a}{2} \int_0^2 \frac{(t-0)(t-2)}{(1-0)(1-2)} dt = -\frac{b-a}{2} \int_0^2 (t^2 - 2t) dt =$$

$$= -\frac{b-a}{2} \left(\frac{t^3}{3} - t^2 \right) \Big|_0^2 = \frac{2(b-a)}{3}$$

stąd

$$Q(f) = I(L_2) = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

błąd formuły trapezów

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{f''(\xi)}{2!} (x - x_0)(x - x_1) dx = -\frac{h^3}{12} f''(\xi)$$

błąd wzoru Simpsona

$$-\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

N	Integral	Error
1	0.750000	0.0250000
2	0.775000	0.0077941
4	0.782794	0.0019530
8	0.784747	0.0004883
16	0.785235	0.0000305

Using the composite Simpson's method, we expect faster convergence. Indeed,

N	Integral	Error
1	-	-
2	0.783333333333	0.00205882353
4	0.78539215686	0.00000596875
8	0.78539812561	0.00000003720
16	0.78539816281	0.00000000058

Inne znane kwadratury:

- Kwadratury Gaussa
- Kwadratura Gaussa-Legendre'a
- Kwadratura Gaussa-Hermite'a (całki niewłaściwe)
- Kwadratury Gaussa- Czebyszewa (punkt osobliwy w $[a,b]$)

Całka niewłaściwa na $[a, \infty]$

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

Całka niewłaściwa na $[-\infty, \infty]$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx + \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^a f(x) dx$$

Jeśli funkcja podcałkowa posiada osobliwości (np. jest nieograniczona, lub przedział całkowania jest nieskończony) wówczas poprzedni schemat całkowania musimy zmodyfikować– **funkcję podcałkową zastępujemy iloczynem funkcji wagowej i nowej gładkiej funkcji:**

$$F(x) = p(x)f(x)$$

Funkcja wagowa $p(x)$ zawiera wszystkie osobliwości funkcji $F(x)$ lub jej dobór wynika z zastosowanych wielomianów ortogonalnych:

$$\int_a^b F(x)dx = \int_a^b p(x)f(x)dx \approx \int_a^b p(x)\varphi(x)dx = \sum_{k=0}^N A'_k f(x_k)$$

$$A'_k = \int_a^b p(x)\Phi_k(x)dx$$

Kwadratury Gaussa

Nadal rozpatrujemy kwadratury typu:

$$S(f) = \sum_{k=0}^N A_k f(x_k) \qquad A_k = \int_a^b p(x) \Phi_k(x) dx$$

ale zmieniamy metodologię postępowania.

Ustalamy funkcję wagową $p(x)$ oraz liczbę węzłów N . Szukamy:

1) położenia węzłów

2) współczynników A_k

tak aby rząd kwadratury był jak najwyższy. Kwadratura tego typu nosi nazwę **kwadratury Gaussa**.

Do wyznaczenia kwadratur Gaussa używa się **wielomianów ortogonalnych**.

Ciąg wielomianów:

$$(P_n(x)) = P_0(x), P_1(x), \dots, P_N(x)$$

Nazywamy ortogonalnymi w przedziale $[a,b]$ jeśli zachodzi pomiędzy nimi związek:

$$(P_r, P_s) = \int_a^b p(x)P_r(x)P_s(x)dx = 0, \quad r \neq s$$

Tw.1. Wielomiany ortogonalne mają tylko pierwiastki rzeczywiste, leżące w przedziale $[a,b]$.

Tw.2.

(a) nie istnieje kwadratura Gaussa rzędu wyższego niż $2(N+1)$

(b) kwadratura Gaussa jest rzędu $2(N+1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy węzły x_k są pierwiastkami wielomianu $P_{N+1}(x)$

Tw. 3. Wszystkie współczynniki A_k w kwadraturach Gaussa są dodatnie.

Metoda kwadratur Gaussa jest zbieżna do każdej funkcji ciągłej w $[a,b]$.
Kwadratury te są dokładne dla wielomianów stopnia $2N+1$.

Kwadratura dla przedziału skończonego (Gaussa-Legendre'a)

Dla tego typu kwadratury przyjmujemy:

$$p(x) = 1$$

$$[a, b] = [-1, 1]$$

W tym przedziale ciąg wielomianów ortogonalnych tworzą wielomiany Legendre'a:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

Współczynniki A_k :

$$A_k = \frac{2}{(N+2)P_{N+2}(x_k)P'_{N+1}(x_k)}$$

Węzły x_k stanowią pierwiastki wielomianu $P_{N+1}(x)$. Dla kwadratur niskiego rzędu węzły i współczynniki A_k są stabilizowane.

N	k	x_k	A_k
1	0, 1	(-/+) 0.577350	1
2	0, 2 1	(-/+) 0.774597 0	5/9 8/9
3	0, 3 1, 2	(-/+) 0.861136 (-/+) 0.339981	0.347855 0.652145
4	0,4 1, 3 2	(-/+) 0.906180 (-/+) 0.538469 0	0.236927 0.478629 0.568889

Aby zastosować wzory z przedziału $[-1,1]$ w przedziale $[a,b]$ należy dokonać transformacji liniowej zmiennej niezależnej:

$$t = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x$$

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 g(x)dx$$

$$g(x) = f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x\right)$$

Podobnie jak poprzednio, w praktyce nie używa się kwadratur wysokiego rzędu. O wiele lepszym rozwiązaniem jest zastosowanie kwadratur złożonych tj. kwadratur niskiego rzędu w każdym podprzedziale a wyniki sumuje się.

Kwadratury dla przedziału nieskończonego.**kwadratura Gaussa-Laguerre'a**

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx \approx S(f) = \sum_{k=0}^N A_k f(x_k)$$

$$[a, b] = [0, \infty)$$

$$p(x) = e^{-x}$$

Ciąg wielomianów ortogonalnych stanowią wielomiany Laguerre'a:

$$L_n(x) = (-1)^n e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) \quad A_k = \frac{((N+1)!)^2}{L'_{N+1}(x_k) L_{N+2}(x_k)}$$

Węzły x_k są pierwiastkami wielomianu $L_{N+1}(x)$.

kwadratura **Gaussa-Hermite'a**.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x) dx \approx S(f) = \sum_{k=0}^N A_k f(x_k)$$

$$p(x) = e^{-x^2}$$

$$(a, b) = (-\infty, \infty)$$

Ciąg wielomianów ortogonalnych stanowią wielomiany Hermite'a:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

$$A_k = \frac{2^{N+2}(N+1)!}{H'_{N+1}(x_k)H_{N+2}(x_k)}$$

x_k są zerami wielomianu H_{N+1}

- Kwadratury Gaussa są dokładniejsze od kwadratur Newtona-Cotesa przy uwzględnieniu tej samej liczby węzłów
- Kwadratury Gaussa mają rząd $r=2N+2$ dla $(N+1)$ węzłów, podczas gdy kwadratury Newtona-Cotesa osiągną ten rząd dla $(2N+1)$ węzłów
- Po ustaleniu rzędu kwadratury stosuje się wzory złożone dla coraz mniejszego kroku całkowania do momentu braku zmian w kolejnym przybliżeniu
- Całkowanie stabilizowanej funkcji podcałkowej lepiej wykonać przy użyciu kwadratur Newtona-Cotesa (użycie kwadratur Gaussa może wymagać dodatkowej interpolacji)

Całki wielokrotne

$$\iint_{\Omega} \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 dx_2 \dots dx_m$$

Jedyny „prosty” przypadek :

$$\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2(x_1)}^{b_2(x_1)} dx_2 \int_{a_3(x_1, x_2)}^{b_3(x_1, x_2)} dx_3 \dots \int_{a_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})}^{b_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})} dx_n f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

sprowadza się do n-krotnych kwadratur jednowymiarowych.

Przy całkowaniu funkcji wielu zmiennych pojawiają się problemy:

Konstrukcja wielomianów interpolacyjnych jest możliwa tylko dla odpowiednio położonych węzłów i regularnych obszarów całkowania

Czas obliczeń rośnie bardzo szybko wraz z liczbą zmiennych. W praktyce liczba zmiennych nie przekracza 4.

Zakładamy, że obszar całkowania można opisać układem nierówności:

$$\Omega \subset R^M$$

$$a_1 \leq x_1 \leq b_1$$

$$a_2(x_1) \leq x_2 \leq b_2(x_1)$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$a_M(x_1, x_2, \dots, x_{M-1}) \leq x_M \leq b_M(x_1, x_2, \dots, x_{M-1})$$

Szukamy wartości całki wielokrotnej:

$$I(f) = \underbrace{\int \dots \int}_{\Omega} f(x_1, x_2, \dots, x_M) dx_1 \dots dx_M$$

$$I(f) = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2(x_1)}^{b_2(x_1)} dx_2 \dots \int_{a_M(x_1, x_2, \dots, x_{M-1})}^{b_M(x_1, x_2, \dots, x_{M-1})} f(x_1, x_2, \dots, x_M) dx_M$$

Wartość całki wielokrotnej oblicza się poprzez M -krotne zastosowanie kwadratur jednowymiarowych.

Przykład dla dwóch wymiarów.

$$I(f) = \int_{a_1}^{b_1} g(x_1) dx_1 \quad g(x_1) = \int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2) dx_2$$

$$I_{N_1}(g) = \sum_{n=0}^{N_1} A_n g(x_{1,n}) \quad g(x_{1,n}) \approx I_{N_2,n}(f_n) = \sum_{\nu=0}^{N_{2,n}} B_{\nu,n} f(x_{1,n}, x_{2,\nu})$$

Po złożeniu obu kwadratur otrzymujemy:

$$\begin{aligned} I(f) = \iint_{\Omega} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 &= \sum_{n=0}^{N_1} \sum_{\nu=0}^{N_{2,n}} B_{\nu,n} f(x_{1,n}, x_{2,\nu}) + R_{N_1}(g) + \\ &+ \sum_{n=0}^{N_1} A_n R_{N_2,n}(f_n) \end{aligned}$$

gdzie: $R_{N_1}(g)$ -reszta kwadratury $I_{N_1}(g)$

$R_{N_{2,n}}(f_n)$ -reszta kwadratury $I_{N_{2,n}}(f_n)$

Uwagi:

- 1) Przedział całkowania po zmiennej x_2 może się zmieniać wraz z wartością x_1
- 2) Liczba węzłów kwadratur $I_{N_{2,n}}(f_n)$ może być różna dla każdego węzła $x_{1,n}$
- 3) Liczba użytych węzłów

$$\sum_{n=0}^{N_1} (N_{2,n} + 1)$$

Jeśli liczba w każdej kwadraturze byłaby jednakowa i równa $(N+1)$ wówczas obliczenie wartości całki w M wymiarowej przestrzeni wiązałoby się z wykonaniem $(N+1)^M$ obliczeń.

Przykład. Jeśli $N=1$ i $M=10$ wówczas $(N+1)^M=(1+1)^{10}=1048576$

Przy dużej liczbie wymiarów ($M>4$) lepiej jest posługiwać się znacznie wydajniejszą metodą Monte Carlo.

Metoda Monte Carlo jest liczbową metodą rozwiązywania problemów matematycznych z pomocą modelowania zmiennych losowych.

Za datę powstania metody Monte Carlo uważa się rok 1949, - publikacja artykułu „The Monte Carlo method”. [1, Metropolis, N., Ulam, S.]. Za twórców metody uważa się matematyków J. Neumanna i S. Ulama

Igła Buffona – prawdopodobnie najbardziej znany przykład zastosowania metod Monte Carlo

Eksperyment w którym wartość π jest przybliżana poprzez wielokrotne rzucanie igły na powierzchnię pokrytą równoległymi liniami

W 1777 Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffon pokazał, że jeśli igła o długości L jest rzucona przypadkowo na równoległe odległe o d linie, to prawdopodobieństwo, że igła upadnie na jedną z linii jest równe

$$P(\times) = \frac{2L}{\pi d} \quad (d \geq L)$$

Całkowanie numeryczne (metoda Monte Carlo)

Stanisław Marcin Ulam (ur. 1909 we Lwowie, zm. 1984 w Santa Fe)

Współtwórca bomby wodorowej, członek projektu Manhattan

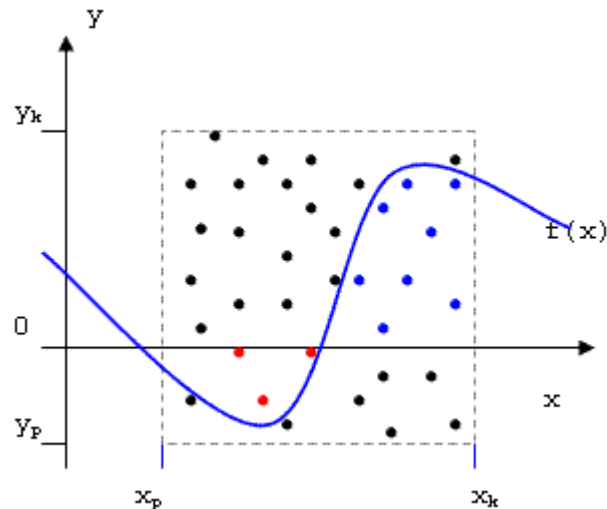
“Pomysł ten, nazwany później metodą Monte Carlo, wpadł mi do głowy, kiedy podczas choroby stawiałem pasjansa. Zauważyłem, że znacznie praktyczniejszym sposobem oceniania prawdopodobieństwa ułożenia pasjansa jest wykładanie kart, czyli eksperymentowanie z tym procesem i po prostu zapisywanie procentu wygranych, niż Próba obliczenia wszystkich możliwości kombinatorycznych, których liczba rośnie wykładniczo”



“Jest to zaskakujące z intelektualnego punktu widzenia, I choć może nie całkiem upokarzające, to jednak zmusza do skromności i pokazuje granice tradycyjnego, racjonalnego rozumowania. Jeśli problem jest wystarczająco złożony, próbowanie jest lepszym sposobem niż badanie wszystkich łańcuchów możliwości.”

Założmy, że chcemy obliczyć całkę z funkcji $f(x)$ w przedziale $\langle x_p; x_k \rangle$. Definicja całki oznaczonej Riemana, - wartość całki równa jest polu obszaru pod wykresem krzywej w zadanym przedziale całkowania. Założmy na początek, iż wiemy z całą pewnością, że wartości funkcji w obszarze całkowania mieszczą się w przedziale $\langle y_p; y_k \rangle$. Pole prostokąta wyznaczonego przez przedział całkowania: $\langle x_p; x_k \rangle$ oraz zakres wartości funkcji w tym przedziale: $\langle y_p; y_k \rangle$ jest prosty do wyznaczenia i wynosi:

$$P = |x_k - x_p| |y_k - y_p|$$



Całkowanie numeryczne (metoda Monte Carlo)

Metoda Monte Carlo polega na **wylosowaniu n punktów** znajdujących się w obrębie wspomnianego prostokąta i na tej podstawie obliczenia stosunku pola powierzchni pod krzywą czyli wartości całki do pola wyznaczonego prostokąta. W tym celu wprowadzimy zmienną pomocniczą c , którą modyfikować będziemy następująco:

- jeżeli wylosowany punkt (x_i, y_i) leży nad osią OY i jednocześnie pod wykresem funkcji całkowanej, czyli spełnia nierówność: $0 < y_i \leq f(x_i)$, wówczas zwiększamy zmienną c o jeden,
- jeżeli wylosowany punkt (x_i, y_i) leży pod osią OY i jednocześnie nad wykresem funkcji całkowanej, czyli spełnia nierówność: $0 > y_i \geq f(x_i)$, wówczas zmniejszamy zmienną c o jeden,
- jeżeli wylosowany punkt (x_i, y_i) nie spełnia żadnego z powyższych warunków, wówczas pozostawiamy zmienną c bez zmian.

Całkowanie numeryczne (metoda Monte Carlo)

Na podstawie wylosowanych punktów i przyporządkowania ich do odpowiedniej kategorii możemy wyznaczyć odpowiednie proporcje:

$$\frac{P_{prostokata}}{Calka} = \frac{n}{c}$$

$$calka = P_{prostokata} \cdot \frac{c}{n} = |x_k - x_p| \cdot |y_k - y_p| \cdot \frac{c}{n}$$

Wraz ze zwiększaniem się liczby punktów pomiarowych n , rozkładają się one coraz bardziej równomiernie w obrębie wyznaczonego prostokąta dając coraz dokładniejszy wynik. Jednym z podstawowych problemów w tej metodzie jest wyznaczenie zakresu wartości funkcji w przedziale całkowania.

Metoda Akceptacji – Odrzuceń, Orzeł - reszka

Jest to najczęściej stosowana metoda Monte Carlo

Czasami nazywana jest `Typowym Monte Carlo`

Losujemy punkty z prostokąta (może być wielowymiarowy)
 $[a, b] * [0, d]$.

Liczymy proporcję punktów leżących nad wykresem do punktów leżących pod wykresem.

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{k}{N}(b - a)d$$

k – liczba punktów pod wykresem, N – liczba losowanych punktów.

Chcemy policzyć całkę $y = \int_0^1 x^5 dx$

W tym przypadku możemy policzyć analitycznie

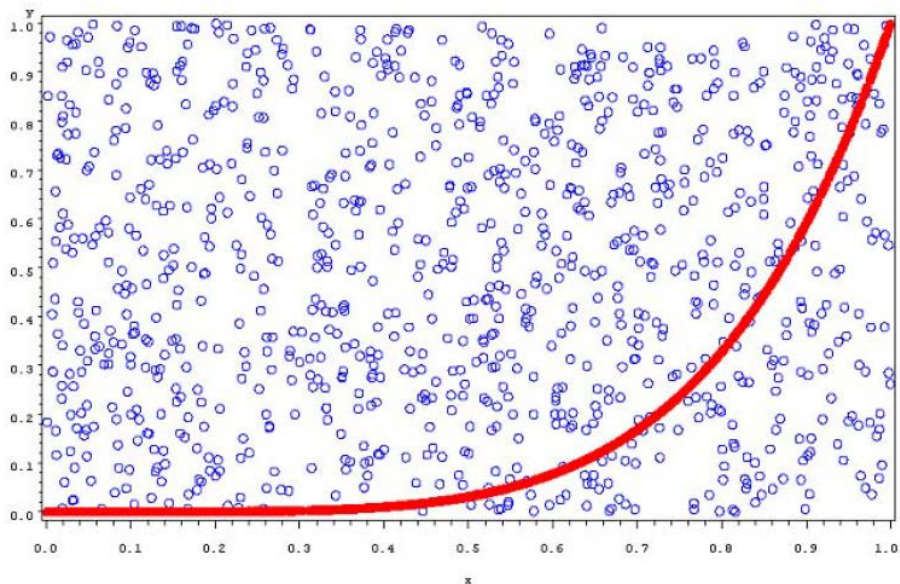
$$y = \int_0^1 x^5 dx = \frac{1}{6} x^6 \Big|_0^1 = \frac{1}{6} = 0.16(6)$$

Ale możemy policzyć też metodą MC.

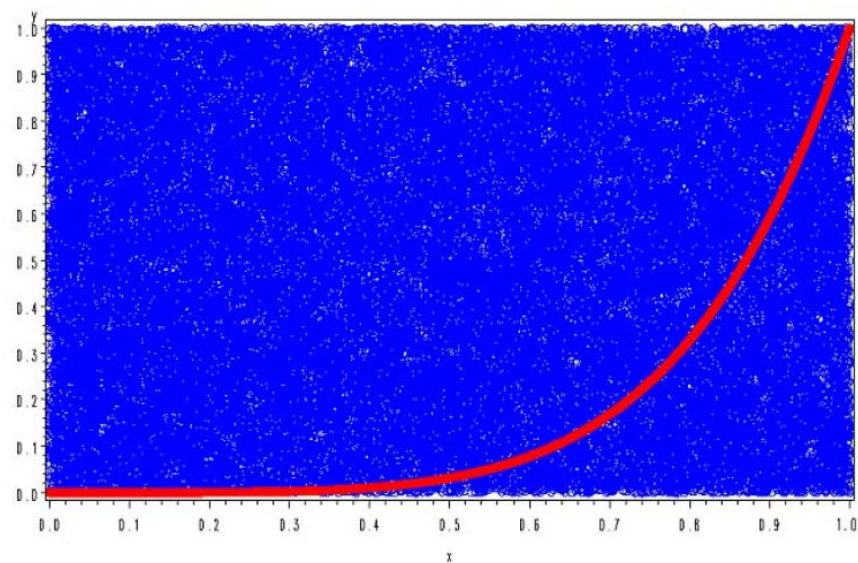
Losujemy N punktów z kwadratu $[0, 1]$ i patrzymy ile z nich leży pod krzywą.

Całkowanie numeryczne (metoda Monte Carlo)

symulacja MC dla 1000 powtorzen. Calka= 0.162



symulacja MC dla 50000 powtorzen. Calka= 0.16805



- 1 Ustaw $k = 0$ i $n = 0$.
- 2 Wylosuj liczby x i y z rozkładu jednostajnego $[0, 1]$
- 3 Sprawdź, czy $y < f(x)$. Jeżeli tak zwiększ k o 1.
- 4 Powtórz punkty 1. i 2. n razy. n powinno być dużą liczbą (np. 10.000).
- 5 Podziel licznik przez liczbę powtórzeń $s = k/n$
- 6 s jest przybliżeniem całki z funkcji na odcinku $[0,1]$.

- W metodzie tej tak naprawdę liczymy prawdopodobieństwo znalezienia się pod wykresem.
- Jeżeli losujemy punkty z prostokąta o polu innym niż 1, to aby obliczyć całkę należy przemnożyć prawdopodobieństwo przez pole prostokąta.
- $$\int = \frac{\text{l. punktów pod wykresem}}{\text{liczba wylosowanych punktów}} \text{pole prostokąta}$$
- Należy pamiętać, żeby prostokąt, z którego losujemy obejmował maksimum z $f(x)$

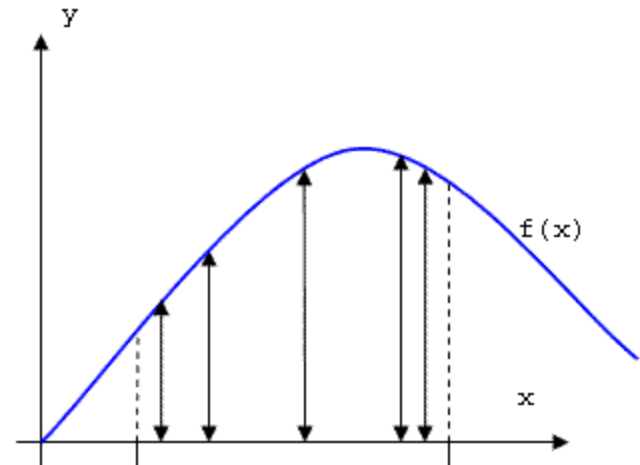
Zmodyfikowany Algorytm do obliczania przybliżonej wartości całki oznaczonej

Liczmy całkę oznaczoną:

$$\int_a^b f(x) dx$$

1. Losujemy niezależne liczby u_1, u_2, \dots, u_n z rozkładu jednostajnego $U[0,1]$;
2. Obliczamy x_k :
$$x_k = a + (b - a)u_k \text{ dla } k=0,1,2,\dots,n;$$
4. Przybliżoną wartość całki obliczamy ze wzoru: (średnia wartość funkcji w n wylosowanych punktach).

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$$



Całkowanie numeryczne (metoda Monte Carlo)

- możliwość rozwiązania trudnych problemów
- prosta forma zastąpienia rozwiązań analitycznych
- rosnąca moc obliczeniowa komputerów
- uwalniają użytkownika od skomplikowanej teorii i wzorów, pozwalając skupić się na istocie pytania, na które statystyka ma odpowiedzieć

- eksperymenty dla jednak skończonej liczby prób
- wyniki zawsze będą przybliżeniem
- wyniki zależą od jakości generatora liczb pseudolosowych

Całkowanie funkcji $f(x)$ metoda trapezów

```
begin
  x:=xa;
  h:=(xb-xa)/(n-1); {skok zmiennej niezależnej}
  trap:=0.0;
  for i:=2 to n-1 do {sumowanie wewnętrznych punktów}
    begin
      x:=x+h;
      trap:=trap+f(x);
    end;
  trap:=2.0*trap+f(xa)+f(xb); {dodanie przyczynków od pierwszego
                                i ostatniego punktu do podwojonej sumy
                                wartości funkcji w punktach wewnętrznych}
  calk_trap:=trap*h/2.0;
end;
```

Całkowanie funkcji $f(x)$ metoda Simpsona (kwadratura Simpsona)

Całka oznaczona z funkcji $f(x)$ w przedziale $[x_a, x_b]$
(liczba węzłów musi być liczba nieparzysta):

$$I = (h/3) * (f_1 + 4 * (f_2 + f_4 + \dots + f_{(n-1)}) + 2 * (f_3 + f_5 + \dots + f_{(n-2)}) + f_n)$$

$h = (x_b - x_a) / (n - 1)$, n nieparzysta liczba węzłów, $x_1 = x_a$, $x_n = x_b$.

1. dane x_a, x_b, n
2. $h := (x_b - x_a) / (n - 1)$
3. sumowanie wartości funkcji w punktach wewnętrznych
 $x := x_a$
for $i := 2$ to $n - 1$ do
 $x := x + h$
 if i parzyste then $\text{simp1} := \text{simp1} + f(x)$
 else $\text{simp2} := \text{simp2} + f(x)$
4. $\text{calk_trap} := h/3.0 * (f(x_a) + f(x_b) + 4 * \text{simp1} + 2 * \text{simp2})$