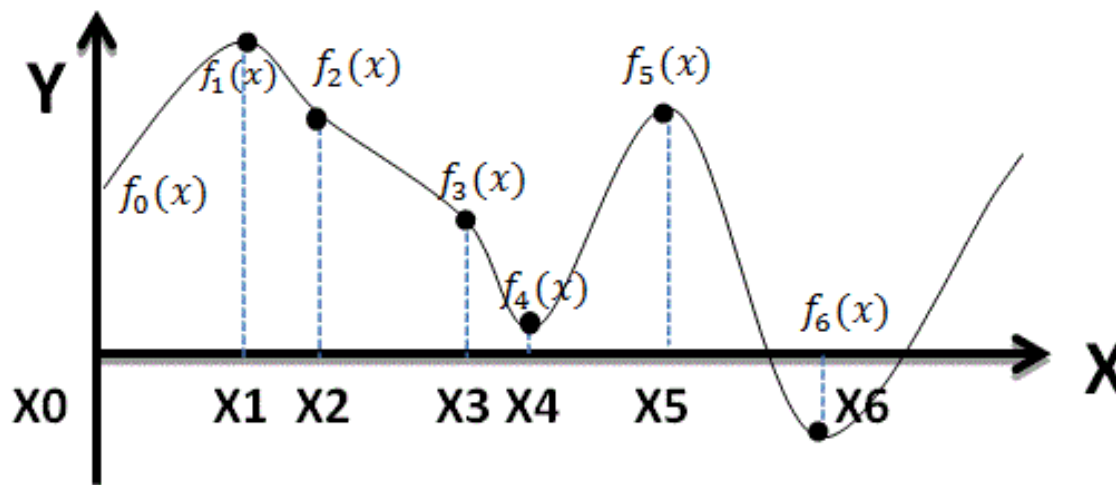


Interpolacją nazywamy postępowanie prowadzące do znalezienia wartości pewnej funkcji $f(x)$ w dowolnym punkcie przedziału (x_0, x_n) na podstawie znanych wartości tej funkcji w punktach $x_0, x_1, \dots, x_n$, zwanych **węzłami interpolacji** ($x_0 < x_1 < \dots < x_n$)



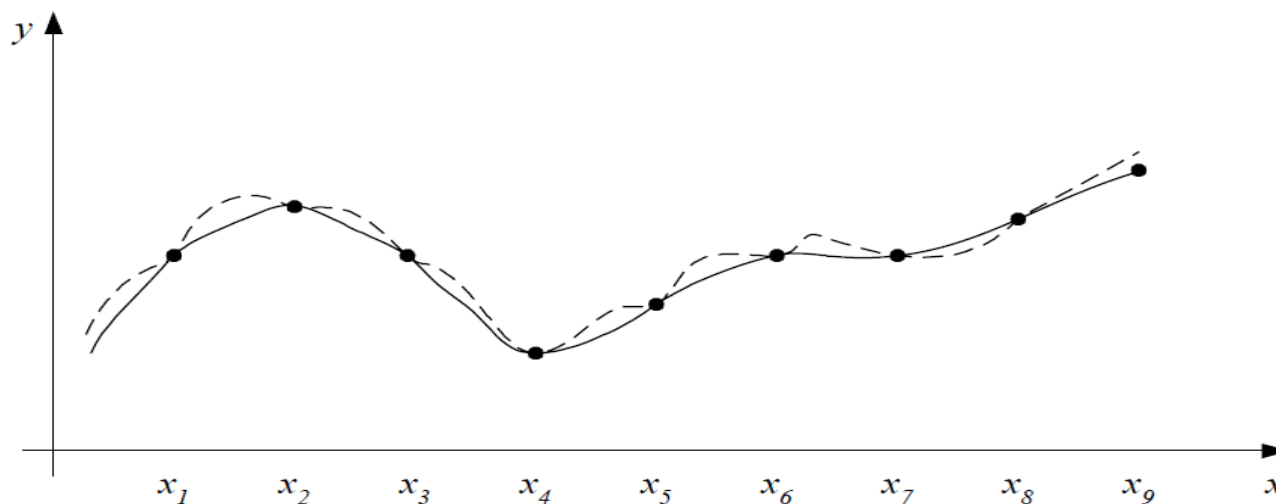
Postępowanie prowadzące do znalezienia wartości funkcji $f(x)$ w punkcie leżącym poza przedziałem (x_0, x_n) nazywamy *ekstrapolacją*. Interpolację lub ekstrapolację stosujemy najczęściej w następujących przypadkach:

- gdy nie znamy samej funkcji $f(x)$, a tylko jej wartości w pewnych punktach (obliczenia dyskretne, eksperyment);
- gdy obliczanie wartości pewnej funkcji $F(x)$ bezpośrednio z określającego ją wzoru nastręcza zbyt duże trudności rachunkowe; wtedy zastępujemy ją prostszą funkcją $f(x)$, o której zakładamy, że w punktach $x_0, x_1, \dots, x_n$ ma te same wartości co funkcja $F(x)$; w tym przypadku $F(x)$ nazywamy *funkcją interpolowaną*, zaś $f(x)$ *funkcją interpolującą*

Zadaniem interpolacji jest wyznaczenie przybliżonych wartości funkcji dla wartości zmiennych niezależnych z przedziału (x_0, x_n) , lecz nie będących punktami ze zbioru $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Jest to bardzo ogólne sformułowanie zadania

- istnieje nieskończenie wiele sposobów jego rozwiązania, jeśli nie jest zadany sposób przeprowadzenia funkcji interpolacyjnej przez zadane punkty



Funkcji interpolującej poszukuje się zwykle w pewnej określonej postaci. Najczęściej zakłada się, że jest to wielomian lub funkcja wymierna.

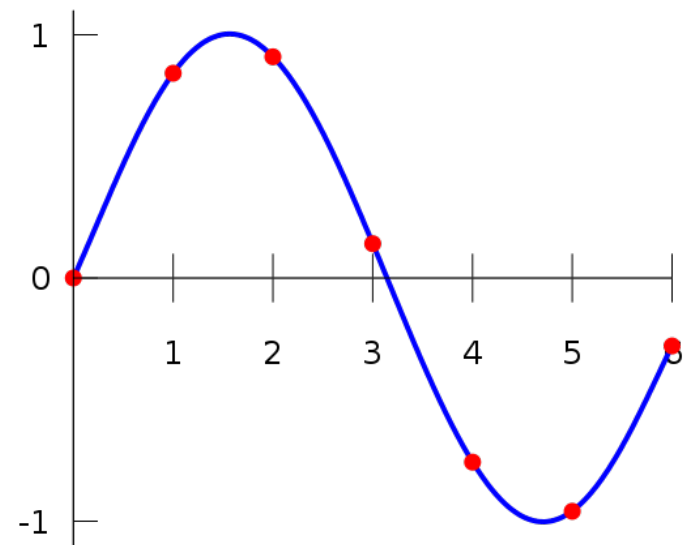
- **Interpolacja wielomianowa**
- Interpolacja trygonometryczna
- Interpolacja wymierna
- Interpolacja funkcjami sklejanymi (spline)
- Interpolacja Hermite'a: interpolacja wielomianowa, w której oprócz zadanych wartości funkcji w węzłach są zadane wartości pochodnych do rzędu m włącznie ($m > 0$).

Metoda interpolacji wielomianowej polega na wybraniu $n+1$ węzłów spośród analizowanych punktów i znalezieniu wielomianu $W(x)$ co najwyżej n -tego stopnia, przyjmującego wartości zadane w węzłach.

Znajdowanie odpowiedniego wielomianu

Wielomian przyjmujący zadane wartości w konkretnych punktach można znaleźć w następujący sposób:

- dla pierwszego węzła o wartości $f(x_0)$ znajduje się wielomian, który w punkcie x_0 przyjmuje wartość $f(x_0)$, a w pozostałych węzłach wartość zero.
- dla każdego kolejnego węzła o wartości $f(x_i)$ znajduje się podobny wielomian, który w punkcie x_i przyjmuje wartość $f(x_i)$, natomiast we wszystkich pozostałych węzłach wartość zero.
- następnie należy zsumować wszystkie wielomiany, gdyż wielomian będący sumą wielomianów obliczonych dla poszczególnych węzłów jest wielomianem interpolującym.



Dana jest funkcja

$$y = f(x), x \in [x_0, x_n].$$

Znamy tablice wartości
tej funkcji, czyli:

$$f(x_0) = y_0$$

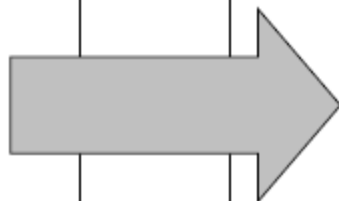
$$f(x_1) = y_1$$

$$\vdots$$

$$f(x_i) = y_i$$

$$\vdots$$

$$f(x_n) = y_n$$



Wyznaczamy funkcję $W(x)$
spełniającą warunki:

$$W(x_0) = y_0$$

$$W(x_1) = y_1$$

$$\vdots$$

$$W(x_i) = y_i$$

$$\vdots$$

$$W(x_n) = y_n$$

Wielomianem interpolacyjnym $W_n(x)$ nazywamy wielomian stopnia co najwyżej n , który w punktach $x_0, x_1, \dots, x_n$ spełnia warunki interpolacji:

$$W_n(x_i) = y_i \text{ dla } i=0,1,2,\dots,n.$$

Twierdzenie

Istnieje dokładnie jeden wielomian interpolacyjny, który w punktach $x_0, x_1, \dots, x_n$ przy założeniu, że $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$ spełnia powyższe warunki interpolacji

Węzły interpolacji $x_0, x_1, \dots, x_n$ mogą być rozmieszczone w zupełnie dowolny sposób

Szukany wielomian można zapisać w postaci:

$$W_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

Postać wielomianu interpolacyjnego:

- Wielomian interpolacyjny Lagrange'a
- Wielomian interpolacyjny Newtona

Korzystając z definicji wielomianu interpolacyjnego otrzymujemy układ $n+1$ równań z $n+1$ niewiadomymi współczynnikami $a_0, a_1, \dots, a_n$

$$W_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = y_0$$

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = y_1$$

.....

$$a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = y_n$$

Interpolacja wielomianowa Lagrange'a

Układ Cramera

$$a_k = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{k-1} & y_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{k-1} & y_1 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{k-1} & x_{k-1}^2 & \dots & x_{k-1}^{k-1} & y_{k-1} & \dots & x_{k-1}^n \\ 1 & x_k & x_k^2 & \dots & x_k^{k-1} & y_k & \dots & x_k^n \\ 1 & x_{k+1} & x_{k+1}^2 & \dots & x_{k+1}^{k-1} & y_{k+1} & \dots & x_{k+1}^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{k-1} & y_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}}$$

Macierz współczynników powyższego układu równań na współczynniki a_i jest **macierzą Vandermonde'a**, której wyznacznik

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

$$D = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) \neq 0 \quad \text{założeniach, że } x_i \neq x_j \text{ dla } i \neq j.$$

Rozwiązanie można zapisać też w następującej postaci

$$a_i = \frac{1}{D} \sum_{j=0}^n y_j D_{ij} ,$$

Gdzie D_{ij} jest dopełnieniem algebraicznym elementu ij macierzy współczynników

Wielomian interpolacyjny Lagrange'a ma następującą postać:

$$\begin{aligned} W_n(x) = & y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} + \\ & + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} + \dots + \\ & + y_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})} = \sum_{j=0}^n y_j \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{(x-x_k)}{(x_j-x_k)}. \end{aligned}$$

Wielomian ten jest wielomianem stopnia co najwyżej n i jest jednoznacznym rozwiązaniem zadania interpolacyjnego dla dowolnego wyboru $n+1$ różnych węzłów interpolacji

Przykład

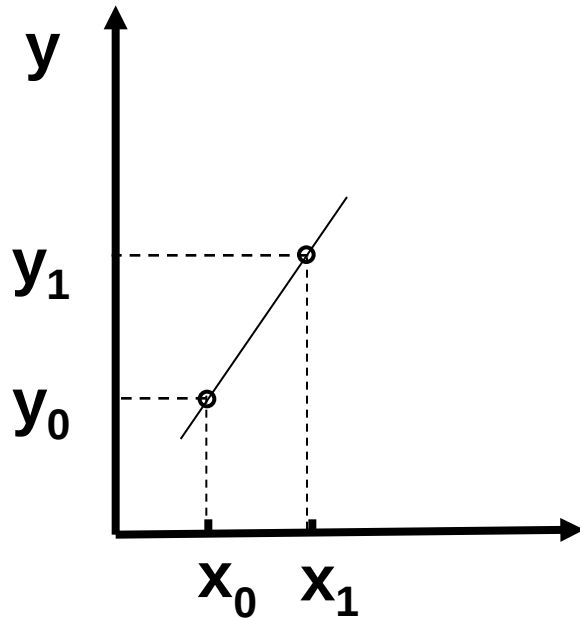
Znaleźć wielomian interpolacyjny Lagrange'a, który w punktach:

-2, -1, 0, 2 przyjmuje odpowiednio wartości 0, 1, 1, 2. Obliczyć także przybliżoną wartość funkcji danej powyższymi wartościami w punkcie $x=1$. ($n=3$)

$$\begin{aligned} W_3(x) &= 0 \frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(-2+1)(-2-0)(-2-2)} + 1 \frac{(x+2)(x-0)(x-2)}{(-1+2)(-1-0)(-1-2)} + \\ &+ 1 \frac{(x+2)(x+1)(x-2)}{(0+2)(0+1)(0-2)} + 2 \frac{(x+2)(x+1)(x-0)}{(2+2)(2+1)(2-0)} = \\ &= \frac{1}{3}(x^3 - 4x) - \frac{1}{4}(x^3 + x^2 - 4x - 4) + \frac{1}{12}(x^3 + 3x^2 + 2x) = \\ &= \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x + 1. \end{aligned}$$

$$f(1) \cong W_3(1) = \frac{1}{6} \cdot 1^3 - \frac{1}{6} \cdot 1 + 1 = 1$$

Przykład: Interpolacja liniowa – wzór prostej przechodzącej przez 2 punkty (węzły) ($n=1$)



$$W_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 =$$

$$\frac{-xy_0 + x_1y_0 + xy_1 - x_0y_1}{x_1 - x_0} =$$

$$\frac{(y_1 - y_0)x + x_1y_0 - x_0y_1}{x_1 - x_0} =$$

$$\frac{(y_1 - y_0)(x - x_0) + (x_1 - x_0)y_0}{x_1 - x_0} =$$

$$y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

Wzór interpolacyjny Lagrange'a jest niewygodny do stosowania w przypadku, gdy zmienia się liczba węzłów. Wtedy do wyznaczenia wielomianu określonego stopnia trzeba powtarzać obliczenia od początku. Zatem poprzez dodanie nowych węzłów interpolacyjnych nie można modyfikować wcześniej wyznaczonego wielomianu Lagrange'a

Modyfikacja- wzór interpolacyjny Newtona

Definiujemy wyrażenia zwane *ilorazami różnicowymi*

- pierwszego rzędu:

$$[x_0, x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

$$[x_1, x_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

.....

$$[x_{n-1}, x_n] = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}},$$

- drugiego rzędu (analogicznie):

$$[x_0, x_1, x_2] = \frac{[x_1, x_2] - [x_0, x_1]}{x_2 - x_0},$$

$$[x_1, x_2, x_3] = \frac{[x_2, x_3] - [x_1, x_2]}{x_3 - x_1},$$

.....

$$[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] = \frac{[x_{n-1}, x_n] - [x_{n-2}, x_{n-1}]}{x_n - x_{n-2}},$$

- k -tego rzędu:

$$[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots$$

oraz $i = 0, 1, 2, \dots$.

Z ilorazów różnicowych można utworzyć tabelkę

x_i	y_i	rzędu 1	rzędu 2	rzędu 3	rzędu 4	rzędu 5
x_0	y_0					
		$[x_0, x_1]$				
x_1	y_1		$[x_0, x_1, x_2]$			
		$[x_1, x_2]$		$[x_0, x_1, x_2, x_3]$		
x_2	y_2		$[x_1, x_2, x_3]$		$[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$	
		$[x_2, x_3]$		$[x_1, x_2, x_3, x_4]$		$\dots$
x_3	y_3		$[x_2, x_3, x_4]$		$[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$	
		$[x_3, x_4]$		$[x_2, x_3, x_4, x_5]$		
x_4	y_4		$[x_3, x_4, x_5]$			
		$[x_4, x_5]$				
x_5	y_5					

wzór interpolacyjny Newtona z ilorazami różnicowymi

$$\begin{aligned} y = W_n(x) = & y_0 + [x_0, x_1](x - x_0) \\ & + [x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ & + [x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

Dane są wartości funkcji: $f(0)=0, f(2)=8, f(3)=27, f(5)=125, f(6)=216$.

Tablica ilorazów różnicowych będzie następująca:

x_i	$f(x_i)$	Ilorazy różnicowe			
		Rzędu 1	Rzędu 2	Rzędu 3	Rzędu 4
$x_0=0$	$f(x_0)=0$				
		$f(x_0;x_1)=\frac{8-0}{2-0} = 4$			
$x_1=2$	$f(x_1)=8$		$f(x_0;x_1;x_2)=\frac{19-4}{3-0} = 5$		
		$f(x_1;x_2)=\frac{27-8}{3-2} = 19$		$f(x_0;x_1;x_2;x_3)=\frac{10-5}{5-0} = 1$	
$x_2=3$	$f(x_2)=27$		$f(x_1;x_2;x_3)=\frac{49-19}{5-2} = 10$		$f(x_0;x_1;x_2;x_3;x_4)=\frac{1-1}{6-0} = 0$
		$f(x_2;x_3)=\frac{125-27}{5-3} = 49$		$f(x_1;x_2;x_3;x_4)=\frac{14-10}{6-2} = 1$	
$x_3=5$	$f(x_3)=125$		$f(x_2;x_3;x_4)=\frac{91-49}{6-3} = 14$		
		$f(x_3;x_4)=\frac{216-125}{6-5} = 91$			
$x_4=6$	$f(x_4)=216$				

Przykład

Znaleźć wielomian interpolacyjny Newtona, który w punktach: -2, -1, 0, 2, 4 przyjmuje odpowiednio wartości -1, 0, 5, 99, -55.

x_i	y_i	rzędu 1	rzędu 2	rzędu 3	rzędu 4
-2	-1	1			
-1	0	5	2	3	
0	5	47	14	-9	-2
2	99	-77	-31		
4	-55				

Dla **$n=4$** wielomian interpolacyjny Newtona ma postać

$$W_4(x) = y_0 + [x_0, x_1] \cdot (x - x_0) + [x_0, x_1, x_2] \cdot (x - x_0)(x - x_1) + \\ + [x_0, x_1, x_2, x_3] \cdot (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \\ + [x_0, x_1, x_2, x_3, x_4](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

A zatem otrzymujemy wielomian o współczynnikach:

$$W_4(x) = -1 + 1(x + 2) + 2(x + 2)(x + 1) + 3(x + 2)(x + 1) + \\ - 2(x + 2)(x + 1)x(x - 2) = -1 + x + 2 + 2(x^2 + 3x + 2) + \\ + 3(x^3 + 3x^2 + 2x) - 2(x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x) = -2x^4 + x^3 + \\ + 19x^2 + 21x + 5$$

Interpolację trygonometryczną stosuje się do wyznaczania funkcji okresowych, często sinusoidalnych, np. funkcji opisujących sygnały elektryczne lub drgania w mechanice.

rozpatrujemy tylko funkcje o okresie 2π . (nie zmniejsza to ogólności zadania)

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

Zadanie interpolacji trygonometrycznej polega na znalezieniu, dla danej funkcji f , wielomianu trygonometrycznego postaci:

$$F_n(x) = \sum_{m=0}^n c_m e^{jmx} = \sum_{m=0}^n c_m (\cos(mx) + j\sin(mx)),$$

gdzie $j = \sqrt{-1}$. Wielomian ten w $n+1$ różnych punktach x_k , $k=0, 1, \dots, n$, $x_k \neq x_l$ dla $k \neq l$, z przedziału $(0, 2\pi)$ przyjmuje te same wartości, co funkcja f . Tzn. dla $k=0, 1, \dots, n$:

$$F_n(x_k) = f(x_k).$$

Potrzeba wyznaczania współczynników wielomianu interpolacyjnego funkcji f opartego na dowolnych węzłach pojawia się w praktyce bardzo rzadko. Z tego powodu ograniczymy się tylko do przypadku węzłów równoodległych (uproszczenie zagadnienia)

$$x_k = \frac{2k\pi}{n+1}, k = 0, 1, \dots, n \quad **$$

Trygonometryczny wielomian interpolacyjny funkcji f , oparty na węzłach
****** może być przedstawiony w następującej postaci:

$$F_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^p (a_m \cos mx + b_m \sin mx) + \frac{1}{2}\delta a_{p+1} \cos(p+1)x \quad \textbf{****}$$

przy czym:

dla n parzystego $\delta=0$, $p=0.5n$;

dla n nieparzystego $\delta=1$, $p=0.5(n-1)$,

współczynniki a_m oraz b_m mają postać:

$$a_m = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) \cos mx_k, \quad m = 0, 1, 2, \dots, p,$$

$$b_m = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) \sin mx_k, \quad m = 1, 2, \dots, p.$$

Znaleźć trygonometryczny wielomian interpolacyjny $F_4(x)$ przechodzący przez węzły interpolacji ** i dla $n = 4$ przybliżający funkcję daną w postaci dyskretnych wartości $f_0 = f_1 = f_2 = 0, f_3 = f_4 = 1$.

Zgodnie ze wzorem **** dla $p=0.5, n = 2$ mamy:

$$\begin{aligned} F_4(x) &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{m=1}^2 (a_m \cos mx + b_m \sin mx) = \\ &= 0.5a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x. \end{aligned}$$

Wyznaczamy węzły interpolacji:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 2/5 \pi, \quad x_2 = 4/5 \pi, \quad x_3 = 6/5 \pi, \quad x_4 = 8/5 \pi,$$

zaś ze wzorów (3.18) otrzymujemy:

$$a_m = \frac{2}{5} \sum_{k=0}^4 f(x_k) \cos mx_k, m = 0, 1, 2,$$

$$b_m = \frac{2}{5} \sum_{k=0}^4 f(x_k) \sin mx_k, m = 1, 2.$$

Zatem:

$$a_0 = \frac{2}{5} \sum_{k=0}^4 f(x_k) = \frac{2}{5} (1 + 1) = \frac{4}{5} = 0.8,$$

$$a_1 = \frac{2}{5} \sum_{k=0}^4 f(x_k) \cos x_k = \frac{2}{5} (-0.809 + 0.309) = -0.200,$$

$$a_2 = \frac{2}{5} \sum_{k=0}^4 f(x_k) \cos 2x_k = \frac{2}{5} (0.309 - 0.809) = -0.200,$$

$$b_1 = \frac{2}{5} \sum_{k=0}^4 f(x_k) \sin x_k = \frac{2}{5} (-0.558 - 0.951) = -0.616,$$

$$b_2 = \frac{2}{5} \sum_{k=0}^4 f(x_k) \sin 2x_k = \frac{2}{5} (0.951 - 0.588) = 0.145.$$

Ostatecznie:

$$F_4(x) = 0.8 - 0.2 \cos x - 0.616 \sin x - 0.2 \cos 2x + 0.145 \sin 2x.$$

